

1 二項分布 $B(3, p)$ の分散を V とすると、 $\sigma = 3p(1 - p)$

2 $B\left(20, \frac{1}{5}\right)$ の分散は $\sigma^2 = 20 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ である。標準偏差は $\sigma = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

3 くじを引いて当たる確率は $\frac{1}{20}$ で、10 回引いたときに X 回当たる確率は ${}_4C_X \left(\frac{1}{20}\right)^X \left(\frac{19}{20}\right)^{10-X}$ となる。よって二項分布 $B(10, \frac{1}{20})$ に従うから、標準偏差 $\sigma = \sqrt{10 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20}} = \frac{\sqrt{190}}{20}$

4 確率密度関数 $f(x)$ とすると、 $m = 10$, $\sigma = 2$ なので、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x-10)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

5 $N(0,1)$ となるような確率変数 $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ なる σ, m を探せばよい。与式を変形すると、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sqrt{2}^2}}$$

なので、平均 $m = 5$, 標準偏差 $\sigma = \sqrt{2}$ である。従って変数変換 $Z = \frac{X - 5}{\sqrt{2}}$ を行くと $N(0,1)$ となる。

6 標準測定 $t = \frac{x - m}{\sigma}$ の式に実際に K 君の成績を当てはめて調べてみる。 $t_{\text{数}} = \frac{70 - 56}{12.4} = 1.1$, $t_{\text{英}} = \frac{76 - 69}{8.2} = 0.85$ を比較して、数学の方が上位であることが分かる。

7 $m = 5$, $\sigma = \sqrt{2}$ より、 $3 < X < 7$ を変形し、 $-2 < X - 5 < 2$ を得る。従って $|X - 5| < 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ Chebyshef の不等式と比較すると $k = \sqrt{2}$ 従って $P(|X - 5| < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$

8 平均 $m = 50$, 標準偏差 $\sigma = 14$ より、上限と下限は $m \pm 2\sigma$ で表されることが分かる。Chebyshef の不等式で $k = 2$ として、 $P(|X - 50| \leq 2 \cdot 14) = P(50 - 28 \leq X \leq 50 + 28) = P(22 \leq X \leq 78) > 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ よって $P(22 \leq X \leq 78)$ は $\frac{3}{4}$ より大きい。

9 平均 62 からの差を考えると、ちょうど 12 点の差のある得点の上限 $74 = 62 + 12$ と下限 $50 = 62 - 12$ である。 $12^2 \leq k^2 \cdot 6^2$ より、 $k^2 \geq 4$ を得る。従って、 $\frac{n}{288} > 1 - \frac{1}{k^2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ となるので、 $n > \frac{3}{4} \cdot 288 = 216$ となり、216 人より多いことが分かる。

10 $\sigma(X)^2$ を求める式を思い出すと、 $\sigma(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ であるから、 $E(X^2) = \sigma(X)^2 + E(X)^2 = 10^2 + 80^2 = 6500$

11 $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ であるので、期待値 $E(Z)$ は

$$E(Z) = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma}\right) - E\left(\frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0$$

$$\text{また、}\sigma(X)^2 = \sigma\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right)^2 = \sigma\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sigma(X)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

よって $\sigma(X)^2 = 1$ である。 Z が正規分布に従うという仮定より、 Z は正規分布 $N(0,1)$ に従う。ここで、 $\sigma\left(\frac{m}{\sigma}\right) = 0$ を用いた (全て同じ値である統計の分散はゼロ)。

12 標本の大きさは $n = 25$, 標本平均は $\bar{X} = 1500$, 母標準偏差は $\sigma = 110$ で、製品の寿命は正規分布に従うから、標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。よって、母平均の信頼区間は信頼度 95 % で $\left[1500 - 1.96 \cdot \frac{110}{\sqrt{25}}, 1500 + 1.96 \cdot \frac{110}{\sqrt{25}}\right] = [1454.88, 1543.12]$ 文中の条件が 4 桁なので有効数字 4 桁で取ると $[1457, 1543]$ 。解答としては $1457 \leq m \leq 1543$ (時間) あるいは 1457 時間以上 1542 時間以内と答えてもよい。(時間)。信頼度 99 % では同様に計算して、 $[1443.24, 1556.76]$ すなわち $[1443, 1557]$ (時間)

13 62 個

14 (1)

Z	0					1	2	4
X	0	0	1	2	0	1	1	2
Y	0	1	0	0	1	2	1	2

従って Z の確率分布は以下のとおり。

Z	0	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(Z) = 1, V(Z) = \frac{16}{9}$

15 白球が出る回数 $X = x$ とすると、 $p_x = {}_4C_x \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{4-x}$ ($x = 0, 1, 2, 3, 4$)

したがって確率分布は $B\left(4, \frac{3}{10}\right)$ に従う。ゆえに $E(X) = \frac{6}{5}$

16 A と B の出た目が一致する確率は $\frac{1}{6}$ 。A の勝った回数を確率変数 X とすると、 $P(X = x) = {}_{90}C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{90-x}$

つまり X は二項分布 $B(90, \frac{1}{6})$ に従う。従って分散は $npq = \frac{25}{2}$

17 くじを引いてあたる確率は $\frac{3}{50}$ で、4 回引いたとき X 回当たる確率は ${}_4C_X \left(\frac{3}{50}\right)^X \left(\frac{47}{50}\right)^{4-X}$ X は二項分布 $B\left(4, \frac{3}{50}\right)$ に従うので、 $\sigma = \frac{\sqrt{141}}{25}$

18 (1) i. $P(0.3 \leq X \leq 1.8) = p(1.8) - p(0.3) = 0.3462$

ii. $P(X \leq -0.5) = P(X \leq 0) - P(-0.5 \leq X \leq 0) = 0.5 - p(0.5) = 0.3085$

(2) i. $P(X \leq 42) = P\left(Z \geq \frac{42-36}{4}\right) = P(Z \geq 1.5) = 0.5 - p(1.5) = 0.0668$

ii. $P(30 \leq X \leq 38) = P\left(\frac{30-36}{4} \leq Z \leq \frac{38-36}{4}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 0.5) = p(1.5) + p(0.5) = 0.6247$

19 正しく丸をつけた人数を X とすると、 X は二項分布 $B\left(1600, \frac{1}{16}\right)$ に従う。よって $m = 160, \sigma = 12$ 。

ゆえに $Z = \frac{X-160}{12}$ とおくと、 Z は近似的に $N(0, 1)$ に従う。従って

$$P(130 \leq X \leq 175) = P\left(\frac{130-160}{12} \leq Z \leq \frac{175-160}{12}\right) = 0.89$$

20 (1) 母平均 $m = 1 \cdot 0.48 + 0 \cdot (1-0.48) = 0.48$, 母標準偏差 $\sigma = \sqrt{1^2 \cdot 0.48 + 0^2(1-0.48) - m^2} = \sqrt{0.2496}$

よって $E(\bar{X}) = 0.48, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{0.2496}}{10} \sim 0.05$

(2) 標本の大きさを n 人とし、 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq 0.03$ とすると、 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0$ より、両辺を 2 乗して $\frac{\sigma^2}{n} \geq 0.0009$ よって

て $n \leq \frac{\sigma^2}{0.0009} = 277.3 \dots$ 従って少なくとも 278 人以上必要。

21 標本比率 R , 標本の大きさを n 人として、信頼度 99 % のときの信頼区間の幅は $2 \times 2.58 \frac{R(1-R)}{n} =$

$$5.16 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}.$$

信頼区間の幅を 6 % 以下とすると $5.16 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \leq 0.06$ と求められる。ここで、 R は賛成率で、 $R \sim 0.60$

と見てよいから、 $5.16 \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} \leq 0.06$ これを解いて $n \geq 86^2 \cdot 0.24 = 1775.04$ 。よって、1776 人以上抽出すればよい。