

第 12 回統計の考え方レポート

1 4 枚の硬貨を同時に投げる試行を 4 回繰り返すとき、2 枚が表で 2 枚が裏となる回数 X の確率分布を求めよ。また X の平均値を求めよ。

2 ある機械で生産される製品のうち、10% は不良品であるという。この機械で 10 個の製品を作る。そのうちの不良品の数を S_{10} とするとき、次のものを求めよ。

(1) $P(S_{10} = 8)$

(2) E_{10}

3 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を T とする。1 回の試行 T でさいころが 2 個とも偶数の目が出る事象を A とする。試行 T を繰り返すとき、 n 回目に事象 A が起これば $X_n = 1$ 事象 A が起こらなければ $X_n = 0$ とし、 $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ とする。 S の期待値 (平均値) $E(S)$ を求めよ。

4 二項分布 $B(2, p)$ について、分散を定義にしたがって求めよ。

5 二項分布 $B(10, \frac{1}{4})$ の分散 σ^2 と標準偏差 σ を求めよ。

6 A, B 2 人がサイコロを振り、出た目が一致すれば A の勝ちとする。90 回勝負してそのうち A の勝った回数を X とするとき、 X の分散を求めよ。

7 50 本のくじに 3 本の当たりくじがある。4 回引いたときに当たる回数を X とする。 X の標準偏差を求めよ。ただし、引いたくじは元に戻すものとする。

8 1 つのサイコロを 10 回振るとき、1 の目が出る回数を表す確率変数を X とする。

(1) $X = k$ ($0 \leq k \leq 10$) となる確率 $P(X = k)$ を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

(3) $\sum_{k=0}^{10} k^2 P(X = k)$ の値を求めよ。

9 二項分布 $P(k) = {}_n C_k p^k q^{n-k}$ ($p + q = 1$, $0 < p < 1$, $k = 0, 1, \dots, n$) に対して、

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (x - k)^2 P(k) \text{ とおくと、} f(x) \text{ の最小値を } n \text{ と } p \text{ を用いて表せ。}$$

10 1 つのサイコロを次の回数だけ振ったとき、6 の目が出る回数 X を確率変数とする。B(n,p) の形で表せ。

(1) 30 回

(2) 300 回

(3) 3000 回

11 $B(10, \frac{1}{5})$ について平均を求めよ。

12 硬貨を 20 回投げるとき、表が出る回数の平均を求めよ。

13 1, 2, 3, 4, 5 の数字が書かれている札が、それぞれ 1, 2, 3, 4, 5 枚ずつある。これを母集団とし、札の数字の変数を X とするとき、母集団分布、母平均 m 、母標準偏差 σ を求めよ。

14 赤球 5 個、白球 3 個、青球 2 個の入っている箱から任意に 1 個を取り出し、色を調べてもとに戻す試行を 5 回繰り返す。このとき、赤球または白球が出る回数を X とする。確率変数 X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

15 (1) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が $f(x) = \frac{1}{2}$ ($0 \leq x \leq 2$) で与えられているとき、次の確率を求めよ。

i. $P(0 \leq X \leq 2)$

ii. $P(0 \leq X \leq 1)$

iii. $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$

(2) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leq x \leq 3$ で、その確率密度関数が $f(x) = k(4 - x)$ で与えられている。このとき定数 k の値を求めよ。

16 トランプのカードが n 枚 ($n \geq 3$) あり、その中の 2 枚はハートで、残りはスペードである。これらのカードをよく切って裏向けに積み重ねておき、上から順に 1 枚ずつめくっていくことにする。初めてハートのカードが現われるのが X 枚目であるとき

(1) $X = k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) となる確率 p_k を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

17 表の出る確率が p ($0 < p < 1$) の硬貨を 2 回投げる。このとき 1 回目に表が出たら $X_1 = 1$, 裏が出たら $X_1 = 0$, 2 回目に表が出たら $X_2 = 1$, 裏が出たら $X_2 = 0$ とすることにより、確率変数 X_1 と X_2 を定義する。 a, b を p に無関係な定数とするとき

(1) 確率変数 $Y = aX_1 + bX_2$ の期待値 (平均値) $E(Y)$ を求めよ。

(2) $a + b = 1$ とするとき Y の分散 $V(Y)$ が最小になるように定数 a, b の値を定めよ。

18 2 枚の硬貨を同時に投げる試行を n 回繰り返す。 k 回目 ($k \geq n$) に表の出た枚数を X_k とし、確率変数 Z を $Z = X_1 \cdot X_2 \cdots \cot X_n$ で定める。

(1) $m = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して、 $Z = 2^m$ となる確率を求めよ。

(2) Z の期待値 $E(Z)$ を求めよ。

item[19] 次の度数分布表は、ある種類の木の実の 1 粒ずつの重さをまとめたものである。実の重さの標準偏差を求めよ。なお、表中の 7.5, 12.5, $\dots$, 47.5 (g) は階級値とする。

実の重さ	7.5	12.5		17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5
実の数	4	34	174	300	296	146	33	5	2

20 母平均 0, 母標準偏差 1 を持つ母集団から抽出した大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ が $-0.1 \geq \bar{X} \geq 0.1$ である確率 $P(|\bar{X}| \geq 0.1)$ を、 $n = 100, 400, 900$ の各場合について答えよ。

第 11 回統計の考え方解答

- 1 (1) n 回目に A の赤球が 0 個になるのは $(n-1)$ 回目に A, B とも赤、白の球が各々 1 個の状態になっていて、次の操作で A の赤と B の白が交換される場合である。 $p_n = q_{n-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}q_{n-1}$ であり、同様に r_n も $r_n = \frac{1}{4}q_{n-1}$ となる。また、 $q_n = 1 - (p_n + r_n)$ であるので、 $q_n = 1 - \frac{1}{2}q_{n-1}$ となる。この式から $q_n = \frac{1}{3} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$ したがって $p_n = r_n = \frac{1}{12} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}$

(2) $E(X_n) = 0 \cdot p_n + 1 \cdot q_n + 2 \cdot r_n = 1$ よって $V(X_n) = (0-1)^2 p_n + (1-1)^2 q_n + (2-1)^2 r_n = p_n + r_n = \frac{1}{6} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}$ である。ちなみに無限回実行すると $\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_n) = \frac{1}{3}$

2

X	0	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

- 3 10 回のうち r 回 1 の目が出る確率を W_r とすると、 $W_r = {}_{10}C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{10-r} = {}_{10}C_r \frac{5^{10-r}}{6^{10}}$ ゆえに W_r を最大にする r を求めるには ${}_{10}C_r 5^{10-r}$ を最大にする r を求めればよい。

$$\begin{aligned} \frac{W_{r+1}}{W_r} &= \frac{{}_{10}C_{r+1} 5^{10-(r+1)}}{{}_{10}C_r 5^{10-r}} = \frac{{}_{10}C_{r+1} 5^r}{{}_{10}C_r 5^{r+1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdots (11-r)(10-r)}{1 \cdot 2 \cdots r(r+1)} \times \frac{1 \cdot 2 \cdots r}{10 \cdot 9 \cdots (11-r)} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{10-r}{r+1} \times \frac{1}{5} \end{aligned}$$

よって $(10-r) - 5(r+1) = 5 - 6r < 0$ すなわち、1 回起こることがもっとも確からしい。

- 4 $x = r$ となる確率は ${}_n C_r p^r q^{n-r}$ である。

(1) 平均は定理に従って、

$$\begin{aligned}
 E(x) &= {}_1nC_1pq^{n-1} + {}_2nC_2p^2q^{n-2} + \cdots + {}_nC_n p^n \\
 &= 1 \cdot \frac{n}{1}pq^{n-1} + 2 \cdot {}_nC_2p^2q^{n-2} + \cdots + n \cdot \frac{n(n-1) \cdots 1}{n \cdots 2 \cdot 1} p^n \\
 &= npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1}p^2q^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots 1}{(n-1) \cdots 1} p^n \\
 &= np \left\{ q^{n-1} + \frac{n-1}{1}pq^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1) \cdots 1}{(n-1) \cdots 1} p^n \right\} \\
 &= np(p+q)^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

である。二項定理を参照せよ。

(2) $\sigma = \sqrt{npq}$

5 1つのエンジンが故障しない確率は $p = 1 - q$ である。2つのエンジンが飛行可能である確率は、故障を起こさないエンジンが2個のときと1個のときなので、0個以外の確率すなわち $1 - (2\text{個とも故障する確率}) = 1 - q^2$ となる。4つのエンジンをもつときには飛行可能の確率が、 $1 - (0\text{個故障のときの確率}) - (1\text{個故障のときの確率}) = 1 - q^2 - 4pq^3 = 1 - 4q^2 + 3q^4$ となる。2つのエンジンの飛行機が、4つのものよりも安全なときは、 $1 - q^2 > 1 - 4q^3 + 3q^4$ となる。これを解いて、 $q > \frac{1}{3}$

6 ワークシートを作る。

階級値 x	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	計
度数 f	2	5	11	14	5	3	40
xf	45.0	137.5	357.5	525.0	212.5	142.5	1420.0

よって $\bar{x} = 35.5(kg)$ 。中央値 M_e は $M_e = 35 + (40 - 35) \times \frac{20-18}{14} \sim 35.7(kg)$ 最頻値 M_o は $M_o = (35 + 40)/2 = 37.5(kg)$

階級値 x	度数 f	xf	x^2f
4.25	16	68.00	289.00
4.75	51	242.25	1150.69
5.25	83	435.75	2287.69
5.75	161	925.75	5323.06
6.25	97	606.25	3789.06
計	408	2278.00	12839.50

表から、平均値は $\bar{x} = 5.58$ (cm)。

標準偏差は $s = 0.58(\text{cm})$

7

8 $E(X) = 3, V(X) = \frac{1}{2}, \sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

9 白球が出る回数 $X = x$ とすると、 $p_x = {}_4C_x \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{4-x}$ 従って、確率変数 X は、二項分布 $B(4, \frac{3}{10})$ に従う。よって平均値は $E(X) = 4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

10 (1) カードの総数は、 $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$ であり、 k と書いたカードが k 枚あるため、 $p_k = \frac{k}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2k}{n(n+1)}$

(2) 平均値は期待値に等しい。 $1 \cdot \frac{2 \cdot 1}{n(n+1)} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{n(n+1)} + \cdots + n \cdot \frac{2 \cdot n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{2n+1}{3}$

(3) 標準偏差 σ に対して

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{2n+1}{3}\right)^2 p_k = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - 2 \frac{2n+1}{3} \cdot k + \frac{(2n+1)^2}{9} k\right) \\
 &= \frac{2}{n(n+1)} \left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2 \frac{2n+1}{3} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{9} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\
 &= \frac{(n+2)(n-1)}{18}
 \end{aligned}$$

よって $\sigma = \frac{\sqrt{2(n+2)(n-1)}}{6}$

11 度数のもっとも多いのは 7 である。よってその階級値が M_o であり、 $M_o = 14$

12 間隔の平均 $\bar{m}$ を求めると、 $\bar{m} = 100.4545454545 \dots$ となるので、有効数字は年の最小単位が 1 年であるのでその $\frac{1}{10}$ 、すなわち小数第 1 位まで。よって、小数第 2 位を四捨五入して、100.5 年と求められる。

13 表を作って計算しよう。 $\bar{x} = \frac{1799}{40} = 44.975$ ここで、有効数字を考えると最小単位が 1 kg より、小数第 1 位までとなる。したがって、小数第 2 位を四捨五入して 45.0 と求められる。

14 ワークシートのように仮平均を書くと分かりやすい。 $m = 113.75$ と求められるが、得点の最小単位が 1 点なので、小数第 1 位まで求めることができればよい。従って、小数第 2 位を四捨五入して、113.8 と求められる。

15 練習だと思ってワークシートのように表を作成して計算してみよう。 $m = 3$, $\sigma^2 = 2$ と求められる。

16 分散の公式が与えられたので、使ってみよう。 $\bar{x} = 9$, $\sum_{k=1}^{50} x_k^2 = 4900$, $N = 50$ である。度数は 1 ずつなので、 $f_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, 50$) より、 $\sigma^2 = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} x_k^2 \cdot 1 - \bar{x}^2 = \frac{1}{50} \times 4900 - 9^2 = 17$

17 階級は階級の中央の値を取る。ワークシートを作ってみよう。各値は、座高の最小単位が 1cm だから、小数第 1 位までとなる。よって小数第 2 位を四捨五入して、 $m = \frac{3870}{44} = 87.95454545 = 88.0$ となる。 $\sigma^2 = \frac{1}{44} \times 340703 - 87.95^2 = 8.0475 = 8.0$ となる。標準偏差は $\sqrt{8.0475} = 2.83681159050085665007 = 2.8$ 講義で学んだような仮平均を使ってもよい。そのほうが計算が楽である。同じ計算が楽にできることを確かめよう。

18 平均値を m とすると、

$$m^2 = \left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right)^2 = \frac{1}{25} \left(\sum_{i=1}^5 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i x_j \right) = 25$$

ここで、 $x_i > 0$ より $m > 0$ であるので、 $m = 5$ 。分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - m^2 = \frac{1}{5} \times 151 - 5^2 = 5.2$$

19 n 人中賛成の割合が p なので、賛成の人数は np 人である。反対者は $n - np = (1 - p)n$ 人。

(1) 度数分布表は

階級値 x	度数 f
0	$(1 - p)n$
1	np
計	n

(2) 平均値 m は上の表から計算して $m = \{0 \times n(1 - p) + 1 \times np\} = p$ 。分散 σ^2 は、

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (x^2 - m^2) = \frac{1}{n} \{0^2 \times n(1 - p) + 1^2 \times np\} - p^2 = p(1 - p)$$

従って、 $\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$

20 (1) 平均値 $-\frac{n}{3}$, 分散 $\frac{8n}{9}$

(2) $\frac{n(n+8)}{9}$

(3) $\frac{n(5n+13)}{9}$