第 12 回数学的考え方レポート

1 x, y, z は $x+y+z=0,\ x^2+x-1=yz$ を満たす実数とする。

(1) x のとりうる値の個数を求めよ。

(2) $\mathrm{P} : \mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^3+\mathrm{y}^3+\mathrm{z}^3$ の最大値・最小値と、そのときの x の値を求めよ。

2 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ とする。区間 $a \leq x \leq a+1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

3 曲線 $\mathrm{C} : \mathrm{y} = \mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2+\mathrm{x}$ と点 A $(1, a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

4 a は定数とする。$x \geq 0$ において常に不等式 $x^3-3ax^2+4a>0$ が成り立つように a の値の範囲を定めよ。

5 4 次関数 $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2+5$ の極値を求めよ。また $y=f(x)$ のグラフをかけ。

6 (1) 関数 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ の $-1 \geq x \geq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

(2) 方程式 $x^4-4x^3-12x^2+32x+a=0$ (a は実数の定数) の実数解の個数を調べよ。

7 a, b, c, d は実数とする。関数

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x \leq -1) \\ ax^2+bx+c & (-1<x<1) \\ d-2x & (1 \leq x) \end{cases}$$

がすべての x で微分可能なときの a, b の値を求めよ。

8 定義にしたがって、次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt{3x+2}$　(2) $y=\dfrac{x}{x-1}$

9 (1) $y=(2x+1)(x-1)$

(2) $y=(x^2+x-2)(x^2+1)$

(3) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$

10 (1) $y=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2-x+1}$

11 (1) $y=(3x+2)^4$　(3) $y=\sqrt{3-2x}$

(2) $y=\dfrac{1}{(2x-1)^3}$　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

12 次の式で与えられる x の関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y であらわせ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(2) $xy=1$

13 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos(x^2+x+1)$　(5) $y=\{\log(2x-1)\}^3$

(2) $y=\sin^3 x\cos^2 x$　(6) $y=\dfrac{1}{\log x^2}$

(3) $y=\dfrac{\tan x}{\sin x+2}$　(7) $y=e^{x^2}$

(4) $y=\log_2 3x$　(8) $y=3^{-2x+1}$

(9) $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$

(10) $y=\dfrac{x+1}{(x+2)^2(x+3)^3}$

(11) $y=x^{\frac{1}{x}}$

14 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y^2=4x$

(2) $\sin y=x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

15 次の関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を t で表せ。

(1) $x=\dfrac{1}{\cos t},\ y=\tan t$

(2) $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}$

16 (1) $x>0$ のとき、不等式 $1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}$ を求めよ。

17 次の関数について、増減を調べ、極値を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

(2) $y=x+2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(3) $y=\cos 2x+2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

(4) $y=x^2e^{-x}$

(5) $y=\dfrac{\log x}{x^2}$

18 関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+2x-3}$ が極値をもつように、定数 a の値を定めよ。

19 関数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ について

(1) $f(x)$ の増減を調べ、そのグラフをかけ。

(2) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

20 (1) 関数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ について次の問に答えよ。

i. 関数 $f(x)$ の増減、極値を調べよ。またグラフの漸近線の方程式を求めよ。

ii. 曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べ、グラフをかけ。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の極値、グラフの凹凸、変曲点を調べ、グラフをかけ。ただし $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ とする。

(3) 関数 $f(x)=e^{-x}\cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ について次の問に答えよ。

i. 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

ii. 曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ、変曲点を求めよ。

21 方程式 $kx^2 - e^x$ の実数解の個数を調べよ。

22 $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

(1) $e^x > 1 + x$

(2) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

23 点 P (x, y) が時刻 t を媒介変数として $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ で表される画面上を動くとき、速度 α、加速度 v とそれぞれの大きさを求めよ。

24 $|x|$ が十分小さいとき、次の関数の近似式を求めよ。

(1) $(1+x)^4$　(2) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$　(3) $\tan x$

25 $y = \sin x$ と $y = \cos x + \alpha$ のグラフが $0 \leq x \leq \pi$ で共有点をもち、この点で共通の接線をもつとき、a の値を求めよ。また、その接線の方程式を求めよ。

第 11 回数学的考え方解答

1 (1) $2x + 4$　(3) $12x^2 - 2x - 3$

(2) $-\dfrac{1}{x^2}$　(4) $3x^2 + 2x - 3$

$24x^2 + 24x + 6$ または $6(2x+1)^2$

(6) $3x^2 - 12x^2 + 20x - 12$ または $4(x-1)(x^2-2x+3)$

2 (1) 4

(2) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

(3) $a = 2, b = 4$

3 (1) $36\pi(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

(2) i. -9.8 (m/後)

ii. 122.5 (m)

iii. 10 s 後、-49 (m/s)

4 $xf\prime(a) + f(a) - af\prime(a)$

5 (1) $a = 1, b = 2$

(2) $-3f\prime(a)$

6 (1) $y = 12x - 16$

(2) $y = -2x + 2$, $y = -2x - 2$

7 $a = 0$ のとき、$y = -x$, $a = 3$ のとき、$y = 8x - 18$

8 (1)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$y\prime$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 27	↘	極小 -5	↗

区間 $x \leq 3$, $1 \leq x$ で単調増加

区間 $-3 \leq x \leq 1$ で単調減少

(2)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$y\prime$	$-$	0	$-$
y	↘	$\frac{7}{3}$	↘

9 (1)

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	
$y\prime$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

(2)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	
$y\prime$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{4}{27}$	↗

10 $a = 2, b = -6, c = 0$,　d=2

11 (1) $a^2 - 3b > 0$

(2) $\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{2}$

12 (1)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$y\prime$		$+$	0	-	
y	-22	↘	極大 10	↗	-17

$x = 0$ で最大値 10, $x = -2$ で最小値 -22

(2)

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$y\prime$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\frac{44}{27}$	↘	極小 -3	↗	4

$x = 2$ で最大値 4, $x = 1$ で最小値 -3

13 体積の最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$, そのときの円柱の高さ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

14 $0 < a < \frac{3}{4}$, $3 < a$ のとき、$M(a) = a^2 - 2a + 1$。$\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき、$M(a) = \dfrac{4}{27}a^3$

15 $a = 1, b = -17$

16 (1) 3 個

(2) $a < -1$ のとき 1 個、$a = -1$ のとき 2 個、$-1 < a < 7$ のとき 3 個、$a = 7$ のとき 2 個、$7 < a$ のとき 1 個

17 $q^2 < 4p^3$

18 (1) $f(x) = x^3 + 16 - 12x$ とし、増減表を調べ、$x > 2$ で常に $f(x) > 0$ を示す。

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ とし、増減表を調べ、$x \geq 0$ で常に $f(x) \geq 0$ を示す。

19 $a = -\frac{9}{8}$, $y = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}$

20 (1) 増減表より、中点 M を求める。$M(3, -2)$。この値が $f(x)$ を満たすことを示す。

(2) $f(x)$ 上の点 (x, y) と対称な点 $(x\prime, y\prime)$ とすると、この中点は M となることを利用して、(X, Y) が $Y = f(X)$ を満たすことを示す。