第 11 回数学的考え方レポート

1 次の関数を微分せよ。ただし、(1), (2) は導関数の定義を使用して微分せよ。

(1) $y = x^2 + 4x$

(2) $y = \frac{1}{x}$

(3) $y = 4x^3 - x^2 - 3x + 5$

(4) $y = (x+1)(x^2-3)$

(5) $y = (2x+1)^3$

(6) $y = (x^2 - 2x + 3)^2$

2 (1) 関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x$ について、$x = -2$ における微分係数を求めよ。

(2) 2 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき、$f(x)$ を求めよ。$f(1) = -3,\ f'(1) = -1,\ f'(0) = 3$

(3) 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ が $2f(x) = (x+1)f'(x) + 6$ を満たすとき、定数 a, b の値を求めよ。

3 (1) 半径 10 cm の円がある。毎秒 1 cm の割合で円の半径が大きくなっていくとき、円の面積の 8 秒後における変化率を求めよ。

(2) 地上から真上に初速度 49 m/s で投げ上げた物体の t 秒後の高さ h は $h = 49t - 4.9t^2$ (m) で与えられる。この運動について次のものを求めよ。

i. 6 秒後の速度

ii. 最高点に達したときの高さ

iii. 地上に落下したときの時刻と速度

4 x についての多項式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りを、$a, f(a), f'(a)$ を用いて表わせ。

5 (1) 等式 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ を満たす a, b の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表わせ。

6 (1) 曲線 $y = x^3$ 上の点 (2, 8) における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y = -x^3 + x$ に接し、傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

7 点 (2, -2) から曲線 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

8 次の関数の増減を調べよ。また、極値を求めよ。

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

(2) $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$

9 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

(2) $y = |x^3 - x^2|$

10 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $x = 0$ で最大値 2 をとり、$x = 2$ で極小値 -6 を取るとき、定数 a, b, c, d の値を求めよ。

11 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ について、

(1) $f(x)$ が極大値と極小値の両方をもつための必要十分条件を a, b を用いて表わせ。

(2) $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値をとり、$x = \beta$ で極小値をとるとする。このとき、$f(\alpha) - f(\beta)$ を α, β を用いて表わせ。

12 次の関数の最大値と最小値を求めよ。またそのときの x の値を求めよ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 10 \quad (-2 \leq x \leq 3)$

(2) $y = 2x^3 - x^2 - 4x \quad (-1 \leq x \leq 2)$

13 半径 a の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。また、そのときの円柱の高さを求めよ。

14 a を正の定数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

15 $0 < a < 3$ とする。関数 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + b \quad (0 \leq x \leq 3)$ の最大値が 10, 最小値が 18 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

16 (1) 方程式 $2x^3 - 6x + 3 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2) 方程式 $2x^3 - 6x + 3 - a = 0$ の異なる実数解の個数が定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ。

17 p, q は定数とする。x の方程式 $x^3 - 3px + q = 0$ が、異なる 3 つの実数解を持つための必要十分条件を求めよ。

18 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $x > 2$ のとき、$x^3 + 16 > 12x$

(2) $x \geq 0$ のとき、$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \geq 0$

19 2 曲線 $y = x^3 - 2x + 1$ と $y = x^2 + 2ax + 1$ が接するとき、定数 a の値を求めよ。また、その接点における共通の接線の方程式を求めよ。

20 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$ とする。

(1) 関数 $y = f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値、$x = \beta$ で極小値をとる。2 点 $(\alpha,\ f(\alpha)), (\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分の中点 M は曲線 $y = f(x)$ 上にあることを示せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ は、点 M に関して対称であることを示せ。

第 10 回数学的考え方解答

1 (1) i. 4

ii. -3

iii. $-\frac{5}{2}$

(2) i. 3

ii. 1

2 (1) $\frac{1}{2}$

(2) $\frac{25}{4}$

3 (1) $\log_2 10 - 1 + ab$, $\log_{15} 40 = \frac{ab+3}{a(b+1)}$

(2) 2

(3) $\alpha\beta\gamma = 1$ を使って証明する。

4 (1) 25

(2) 0

5 (1) $y = \log_4 x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。

(2) $y = \log_4 x$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したもの。

(3) $y = \log_4 x$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。

6 (1) $1.5 \geq \log_3 5$

(2) $\log_4 9 < 2 < \log_2 5$

(3) $\log_{0.5} 3 < \log_{0.5} 2 < \log_5 2 < \log_3 2$

7 (1) $x = 3$

(2) $x = 4$

(3) $x = 4, 8$

8 (1) $-3 \leq x < 2$

(2) $4 < x < 3 + \sqrt{3}$

(3) $0 < x < \frac{1}{2}$, $4 < x$

9 $x = 1$ で最大 1, $x = 4$ で最小値 -3 をとる。

10 $(x, y) = (4, 4)$ のとき最大値 4, $(x, y) = (2, 8)$ のとき最小値 3

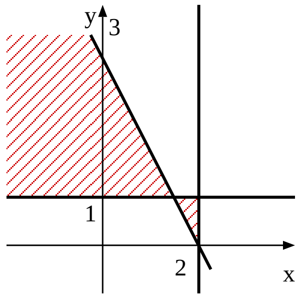
11 (1) $\log_{10} 5 = 0.6990$, $\log_{10} 0.006 = -2.2219$, $\log_{10} \sqrt{72} = -0.9286$

(2) 39 桁の整数

(3) 小数第 18 位

12 (a) 100×1.05^n (万円)

(b) 9 年後

13 

斜線部分、ただし境界は含まない。

14 $n = 44$。このとき、$8^{4}4$ の 1 の位は 6、最高位は 40 桁でその値は 5

15 (1) y 軸に関して対称移動し、y 軸方向に 1 だけ平行移動する。

(2) x 軸に関して対称移動し、x 軸方向に 2 だけ平行移動する。

16 $log_8 125 < log_4 26 < log_2 6$

17 (1) $x = 2$ のとき最大値 0

(2) $x = 1$ のとき最大値 7、$x = 9$ のとき最小値 9

18 (1) $x = 1, 3$

(2) $x \geq 27$, $0 < x < \frac{1}{3}$

19 (1) 16 桁の数

(2) 小数第 16 位にはじめて 0 でない数が現れる。

20 $n = 87$