

第 9 回数学的思考方レポート

1 次の計算をせよ。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。

- (1) $4^5 \times 2^{-8} \div 8^{-2}$
- (2) $(a^{-1})^3 \times a^7 \div a^2$
- (3) $(a^2b^{-1})^3 \div (ab^{-2})^2$
- (4) $^3\sqrt{9} \times ^3\sqrt{81}$
- (5) $^3\sqrt{5} \div ^{12}\sqrt{5} \times ^8\sqrt{25}$
- (6) $^3\sqrt{-16} + ^3\sqrt{-2} + ^3\sqrt{54}$
- (7) $\frac{^3\sqrt{a^4}}{\sqrt{b}} \times \frac{^3\sqrt{b}}{^3\sqrt{a^2}} \times ^3\sqrt{a\sqrt{b}}$

2 (1) $a > 0, b > 0$ とする。次の式を計算せよ。

- i. $(^3\sqrt{a} + ^6\sqrt{b})(^3\sqrt{a} - ^6\sqrt{b})(^3\sqrt{a^4} + ^3\sqrt{a^2b} + ^3\sqrt{b^2})$
- ii. $(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{-\frac{1}{4}})$

(2) $a > 0, a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{7}$ のとき、 $a + a^{-1}$ の値を求めよ。

3 次の各組の数の大小を比較せよ。

- (1) $2^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{4}}, 8^{\frac{1}{8}}$
- (2) $^3\sqrt{\frac{1}{25}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, ^4\sqrt{\frac{1}{125}}$
- (3) $\sqrt{2}, ^3\sqrt{3}, ^6\sqrt{6}$

4 次の方程式、連立方程式を解け。

- (1) $3^{x+2} = 27$
- (2) $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$
- (3) $\begin{cases} 3^{2x} - 3^y = -6 \\ 3^{2x+y} = 27 \end{cases}$

5 次の不等式を解け。

- (1) $(\frac{1}{2})^{x-1} < \frac{1}{32}$
- (2) $2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 < 0$
- (3) $25^x - 3 \cdot 5^x - 10 \geq 0$

- (4) $3^x = 3\sqrt{3}$
- (5) $5^{2x+1} < \frac{1}{25}$
- (6) $27 \cdot 9^x = 1$
- (7) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$
- (8) $(\frac{1}{4})^x \geq 0.5^{x-1}$
- (9) $2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 9$
- (10) $4^{2x} - 7 \cdot 4^x - 8 \leq 0$

7 (1) 関数 $y = 4^{x+1} - 2^{x+2} + 2$ ($x \leq 2$) の最大値と最小値を求めよ。

(2) 関数 $y = 6(2^x + 2^{-x}) - 2(4^x + 4^{-x})$ について、 $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと、 y を t を用いて表せ。また、 y の最大値を求めよ。

8 次の関数について、下の表の x に対する y の値を小数第 2 位まで求め、同じ座標軸上にグラフをかけ。

- (1) $y = 3^{x-1}$
- (2) $y = 3^{-x-1}$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
(1) y									
(2) y									

9 $y = 3^x$ のグラフをもとにして、次の関数のグラフをかけ。

- (1) $y = 3^{x-2}$
- (2) $y = -\frac{1}{3^x}$
- (3) $y = \frac{3^x}{3} + 2$

10 $0 < a < b < 1$ のとき a^b, b^a, a^{-b}, b^{-a} を小さいほうから順に並べよ。

11 次の関数の最大値、最小値を求めよ。

- (1) $y = 3^{-x-1} + 2$ ($-2 \leq x \leq 1$)
- (2) $y = 4^x - 2^{x+2} + 5$ ($0 \leq x \leq 5$)

12 $3^{2x} = 5$ のとき、 $y = \frac{3^{3x} + 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}}$ はいくつになるか。

13 方程式 $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$ の解を求めよ。

14 x の関数 $f(x) = 2^{2x} - 2^{x+2} + 8$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

15 $3^x = X, 2^y = Y$ とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $x = 1, y = 0$ のときの $X^2 + Y^2$ の値、および $x = \frac{1}{2}, y = 1$ のときの $X^2 + Y^2$ の値を求めよ。
- (2) x, y が $9^x + 4^y = 4$ を満たすとき、 $X^2 + Y^2$ の値を求めよ。また、このときの X の取り得る値の範囲を求めよ。
- (3) (2) のとき、 $3^{x+1} + 2^{2y+1}$ のとり得る値の最大値を求めよ。また、このときの x を $\log_3 2$ を用いて表せ。

16 関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - (2^x + 2^{-x})$ について次の問いに答えよ。

- (1) 4^{-1} を指数を使わずに表せ。また $f(1)$ を求めよ。
- (2) $2^x + 2^{-x} \geq 2$ を証明せよ。また、等号が成り立つときの x の値を求めよ。
- (3) $X = 2^x + 2^{-x}$ とおくと、 $4^x + 4^{-x}$ を X で表せ。また、 $f(x)$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

17 関数 $f(x) = 2^{x+2} + 2^{-x}$ の最小値の値と、そのときの x の値を求めよ。

18 $2^x = 3^y = a$ のとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a > 0, a \neq 1$ とする。

- (1) $a^{\frac{1}{x}}, a^{\frac{1}{y}}$ の値を求めよ。
- (2) $a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ の値を求め、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ を a を用いて表せ。
- (3) $a = 6^z$ のとき、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ が成り立つことを示せ。

19 (1) $a > 0, x > 0, a^{\frac{1}{2}x} + a^{-\frac{1}{2}x} = 3$ のとき、 $a^x + a^{-x}, a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x}$ の値を求めよ。

(2) $2^x = 3^y, 24^z = ^4\sqrt{6}$ を満たす x, y, z に対して、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ および $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ を求めよ。

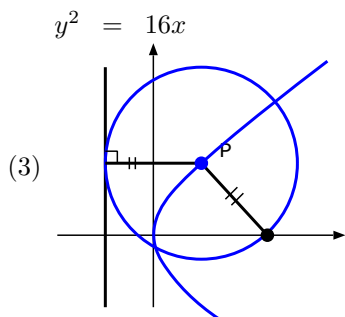
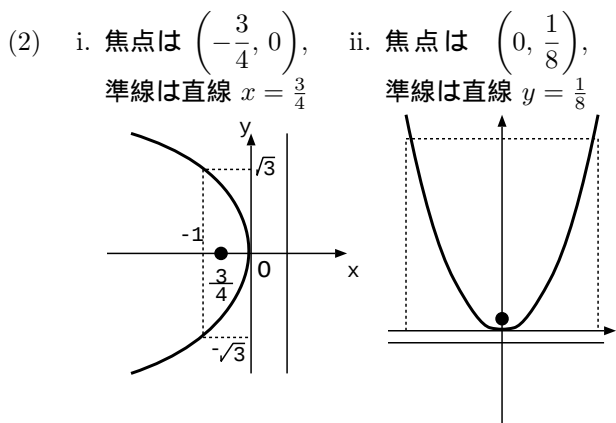
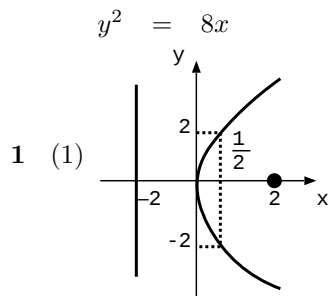
20 関数 $f(x) = 3^{2x} - 2 \cdot x^{x+1} + 81$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $f(x) < 3^{x+3} - 3^{x+1}$ を満たす x の範囲

を求めよ。

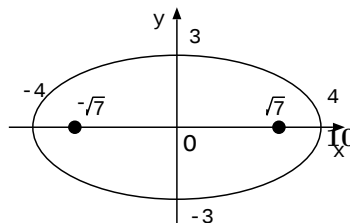
(2) $-3 \geq x \geq 3$ の範囲で関数 $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

第 8 回数学的思考方解答

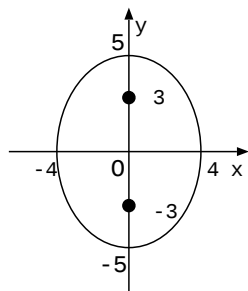


2 拋物線 $y^2 = 16x$ および $y^2 = 12(x-1)$

3 (1) 長軸の長さ 8, 短軸の長さ 6, 焦点は $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$



(2) 軸の長さ 10, 短軸の長さ 8, 焦点は $(3, 0), (-3, 0)$

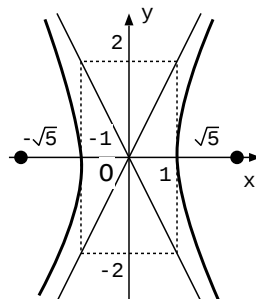


4 楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

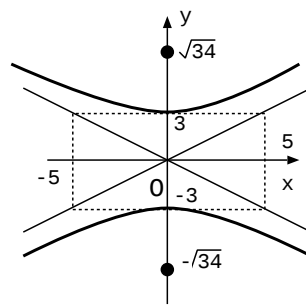
5 楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

6 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

7 (1) 焦点は $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$, 漸近線は $x \pm \frac{y}{2} = 0$



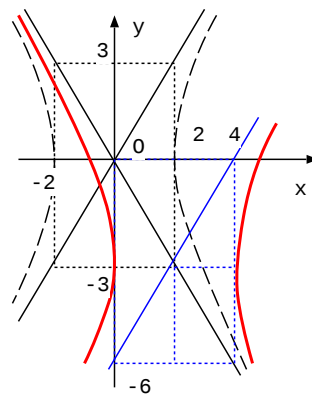
(2) 焦点は $(0, \sqrt{34}), (0, -\sqrt{34})$, 漸近線は $\frac{x}{5} \pm \frac{y}{3} = 0$



8 (1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

(2) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

9 (1) $4x^2 + 25y^2 + 16x - 150y + 141 = 0$, 焦点は $(\sqrt{21}-2, 3), (-\sqrt{21}-2, 3)$



(2) 実線のようになる。

(1) $-2 < m < 2$ のとき 2 個; $m \leq 2, 2 \leq m$ のとき, 0 個。

(2)

11 $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $PQ = \frac{\sqrt{323}}{5}$

12 (1) $k < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < k$

(2) 直線 $y = -\frac{x}{2}$ の $x < -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} < x$ の部分。

13 求める直線の傾きは 第 1 象限, 第 4 象限 とともに $2\sqrt{2}$

14 $x - y = -4, 5x + 11y = 28$

15

$$y^2 = 4px \quad (p > 0) \quad (1)$$

とする。放物線 (1) 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \quad (2)$$

(2) で $y = 0$ とおくと $x = -x_1$ よって $T(-x_1, 0)$ 。
また $F(p, 0)$ であるから $FP = \sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2}$ 。
ここで点 $P(x_1, y_1)$ は (1) 上にあるから $y_1^2 = 4px_1$ 。
 $x_1 > 0, p > 0$ から $FP = x_1 + p$ 。また $FT = x_1 + p$ 。
ゆえに $FP = FT$ 。したがって $\triangle FPT$ は二等辺三角形であるから $\angle PTF = \angle TPF$

$$16 \quad (1) \quad m = \frac{a}{4b}$$

$$(2) \quad d \text{ の最小値は } \sqrt{3}$$

$$17 \quad 0 < a < 1 \text{ のとき楕円 } x^2 + \frac{y^2}{1-a^2} = 1. \quad 1 < a \text{ のとき双曲線 } x^2 - \frac{y^2}{a^2-1} = 1.$$

$$18 \quad \text{楕円の方程式を } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ とすると、短軸の両端は } B(0, b), B'(0, -b) \text{ である。直線 BP の方程式から } Q(\frac{bx_1}{y_1-b},) \text{ また } R(\frac{bx_1}{y_1+b}, 0) \text{ } OQ \cdot OR = a^2$$

$$19 \quad a \leq 3 \text{ のとき最小値 } \sqrt{a^2} = |a| \quad a > 3 \text{ のとき最小値 } \sqrt{\sqrt{6a}-9}$$

$$20 \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$21 \quad g \circ f(x) = \frac{6}{x+1} - 1, f \circ g(x) = \frac{3}{2x}, g \circ g(x) = 4x - 3$$

$$22 \quad (1) \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

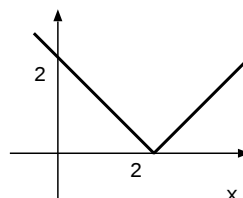
$$(2) \quad \frac{3}{x+2} - 1$$

$$23 \quad y = 3x + 3 (-1 \neq x \neq 0)$$

$$23 \quad (1) \quad y = -\sqrt{\frac{x}{2}} \quad (x \geq 0)$$

$$(2) \quad \sqrt{-4(x-2)} \quad (x \geq 2)$$

$$25 \quad (1) \quad f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ -x + 2 & (x < 2) \end{cases}$$



(2)

$$y = \begin{cases} x - 4 & (x \geq 4) \\ -x + 4 & (2 \leq x < 4) \\ x & (0 \leq x < 2) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

$$(3) \quad x = 1, 3$$