

第 8 回数学的思考方レポート

- 1 (1) 焦点が $(2, 0)$, 準線が直線 $x = -2$ である放物線の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。
- (2) 次の放物線の焦点と準線を求め、その概形をかけ。
- i. $y^2 = -3x$ ii. $y = 2x^2$
- (3) 点 $F(4, 0)$ を通り、直線 $l: x = -4$ に接する円の中心の軌跡を求めよ。
- 2 円 $(x-4)^2 + y^2 = 1$ と直線 $x = -3$ の両方に接するような円の中心 P の軌跡を求めよ。
- 3 次の楕円の長軸、短軸の長さ、焦点を求めよ。また、その概形をかけ。
- (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $25x^2 + 16y^2 = 400$
- 4 焦点が $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ で点 $A(-4, 0)$ を通る楕円の方程式を求めよ。
- 5 円 $x^2 + y^2 = 25$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{3}{5}$ 倍に縮小すると、どのような曲線になるか。
- 6 長さ 2 の線分の両端 A, B がそれぞれ x 軸および y 軸上を移動するものとする。線分 AB の延長線上に $BP = 1$ となるように点 P をとるとき、点 P の軌跡を求めよ。
- 7 次の双曲線の焦点と漸近線を求めよ。またその概形をかけ。
- (1) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (2) $9x^2 - 25y^2 = -225$
- 8 次のような双曲線の方程式を求めよ。
- (1) 2 点 $(5, 0), (-5, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の差が 8 である。
- (2) 焦点が $(0, 4), (0, -4)$ で、漸近線が直線 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ である。
- 9 (1) 楕円 $4x^2 + 25y^2 = 100$ を x 軸方向に -2, y 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円の方程式を求めよ。また、その焦点を求めよ。
- (2) 曲線 $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$ の概形をかけ。
- 10 次の曲線と直線の共有点の個数を求めよ。ただし、 k, m は定数とする。
- (1) $x^2 + 4y^2 = 20, y = 2x + k$
- (2) $4x^2 - y^2 = 4, y = mx$
- 11 直線 $y = 4x + 1$ と楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ が交わってできる弦の中点の座標および長さを求めよ。
- 12 双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ と直線 $y = -x + k$ が異なる 2 点 P, Q で交わる時
- (1) 定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) (1) の範囲で k を動かしたとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。
- 13 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の焦点 F を通る直線と放物線との交点を P, Q とするとき、線分 P, Q が点 F で 1:2 に内分されるように直線 PQ の傾きを求めよ。
- 14 点 $(-1, 3)$ から楕円 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ に引いた接線の方程式を求めよ。
- 15 放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線と x 軸との交点を T , 放物線の焦点を F とすると、 $\angle PTF = \angle TPF$ であることを証明せよ。ただし、 $x_1 > 0, y_1 > 0$ とする。
- 16 双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ 上の点 (a, b) における接線の傾きが m のとき、次の問いに答えよ。ただし、 $b \neq 0$ とする。
- (1) a, b, m の間の関係式を求めよ。
- (2) この曲線上の点と、直線 $y = 2x$ の間の距離を d とする。 d の最小値を求めよ。また、 d の最小値を与える曲線上の点の座標を求めよ。
- 17 $a > 0, a \neq 1$ とする。点 $A(a, 0)$ からの距離と直線 $x = \frac{1}{a}$ からの距離の比が $a : 1$ である点 P の軌跡を求めよ。
- 18 楕円上にあつて、長軸、短軸にない点 P と短軸の両端を結ぶ直線が、長軸またはその延長と交わる点を Q, R とする。楕円の中心を O とすると、線分 OQ, OR の長さの積は一定であることを証明せよ。
- 19 放物線 $y^2 = 6x$ 上の点 P と、定点 $A(a, 0)$ の距離の最小値を求めよ。ただし、 a は実数の定数となる。
- 20 楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ について、楕円の外部の点 $P(a, b)$ から、この楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。
- 21 次の関数 $f(x), g(x)$ に対して、合成関数 $g \circ f(x), f \circ g(x), g \circ g(x)$ を求めよ。
- 22 次の関数の逆関数を求めよ。
- (1) $y = 3x + 5$ (2) $y = \frac{3}{x+1} - 2$
- 23 関数 $y = \frac{1}{3}x - 1$ ($0 \leq x \leq 3$) の逆関数を求めよ。またそのグラフをかけ。
- 24 次の関数の逆関数を求め、そのグラフをかけ。また逆関数の定義域を求めよ。
- (1) $y = 2x^2$ ($x \leq 0$) (2) $y = -\frac{1}{4} + 2$ ($x \geq 2$)
- 25 $f(x) = |x - 2|$ について次の問いに答えよ。
- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 関数 $y = f \circ f(x)$ を求めよ。
- (3) 方程式 $f \circ f(x) = f(x)$ を解け。