第 5 回数学的考え方レポート

1 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=|x-2|$　　(2) $y=|x+1|+|x-3|$

2 次の 2 次関数のグラフは 2 次関数 $y=-x^2$ のグラフをそれぞれどのように平行移動したものか答えよ。また、それぞれのグラフをかき、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=-x^2+1$　　(3) $y=-(x-4)^2+2$
(2) $y=-(x+3)^2$

3 次の 2 次関数のグラフをかき、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=2x^2+3x+1$　　(2) $y=-x^2+4x-3$

4 (1) 放物線 $y=-2x^2+4x-4$ を x 軸方向に -3, y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=2x^2+6x+7$ は 2 次関数 $y=2x^2-4x+1$ のグラフをどのように平行移動したものか。

(3) 放物線 $y=x^2-5x+2$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(4) x 軸方向に 1, y 軸方向に -2 だけ平行移動すると放物線 $\mathrm{C_2}$:　$\mathrm{y=2x^2+8x+9}$ に移されるような放物線 C の方程式を求めよ。

5 $y=2x^2-5x+4$ のグラフを

(1) x 軸　　(2) y 軸　　(3) 原点

のそれぞれに関して対称移動した曲線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

6 定義域が $0\leq x\leq a$ である関数 $y=x^2-4x+1$ の最大値および最小値を次の各場合について求めよ。

(1) $0<a<2$　　(3) $a=4$
(2) $2\leq a<4$　　(4) $4<a$

7 (1) 関数 $y=-2x^2+8x+k\quad(1\leq x\leq 4)$ の最大値が 4 であるように定数 k の値を定めよ。またこのときの最小値を求めよ。

(2) 関数 $y=x^2-2lx+l^2-2l\quad(0\leq x\leq 2)$ の最小値が 11 になるような正の定数 l の値を求めよ。

8 (1) $x+2y=3$ のとき、$2x^2+y^2$ の最小値を求めよ。

(2) $x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+y=8$ のとき、xy の最大値と最小値を求めよ。

9 2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき、その 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が 点 $(-2,\ 1)$ で、点 $(-1,\ 4)$ を通る。

(2) 軸が直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で、2 点 $(-1,\ -6),\ (1,\ 2)$ を通る。

(3) 3 点 $(-1,\ 16),\ (4,-14),\ (5,-8)$ を通る。

(4) 放物線 $y=-2x^2$ を平行移動した曲線で、2 点 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$ を通る。

(5) 頂点が x 軸上にあって、2 点 $(0,\ -4),\ (-4,\ 36)$ を通る。

(6) $y=2x^2$ を平行移動したもので、点 $(2,\ 4)$ を通り、頂点が直線 $y=2x-4\mathrm{s}$ にある。

10 (1) 関数 $y=-[x]\quad(-3\leq x\leq 2)$ のグラフをかけ。ただし $[a]$ は実数 a を超えない最大の整数を表すものとする。

(2) 関数 $f(x)\quad(0\leq x\leq 4)$ を右のように定義するとき、次の関数のグラフをかけ。

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0\leq x<2) \\ 8-2x & (2\leq x\leq 4) \end{cases}$$

i. $y=f(x)$
ii. $y=f(f(x))$

11 定義域を $0\leq x\leq 3$ とする関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ の最大値が 9, 最小値が 1 のとき、定数 a,b の値を求めよ。

12 次の 2 次関数のグラフは x 軸と共有点を持つか。持つ場合はその座標を求めよ。

(1) $y=x^2-3x-4$　　(3) $y=3x^2-5x+4$
(2) $y=-x^2+4x-4$

13 放物線 $y=x^2-4x+k$ と x 軸の共有点の個数は、定数 k の値によってどれによって変わるか。

14 (1) 2 次関数 $y=x^2+2(2-k)x+k$ のグラフが x 軸に接するように、定数 k の値を定めよ。またそのときの接点の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-(k+2)x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 4 であるとき、定数 k の値を求めよ。

15 次の放物線と直線の共有点はあるか、あればその座標を求めよ。

(1) $y=x^2,\ y=-x+2$

(2) $y=-x^2+2,\ y=4x+5$

(3) $y=4x^2-6x+1,\ y=2x-4$

16 (1) 放物線 $y=x^2+3x+a$ が直線 $y=x+4$ と共有点をもつように、定数 a の範囲を定めよ。

(2) 2 次関数 $y=-x^2$ のグラフと直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数を調べよ。ただし、k は定数とする。

17 次の 2 次不等式を解け。

(1) $3x^2+20x-7>0$
(2) $2x^2-x-4\geq 0$
(3) $2-x\geq x^2$
(4) $-5x^2-2x+1>0$
(5) $x^2+2x+1>0$
(6) $x^2-4x+5>0$
(7) $4x\geq 4x^2+1$
(8) $-3x^2+8x-6>0$

18 (1) 2 次方程式 $x^2-(k+1)x+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような、定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y=|x^2-3x+4|$ のグラフをかけ。

19 (1) すべての実数 x に対して、2 次不等式 $x^2+(k+3)x-k>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 任意の実数 x について、2 次不等式 $ax^2-2\sqrt{3}x+a+2\geq 0$ が成り立つような定数 a の値を求めよ。

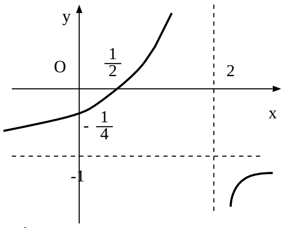
20 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x^2-5x-3<0 \\ 3x^2-4x-4\geq 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-4x+2>0 \\ 4-7x-2x^2\geq 0 \end{cases}$

第 4 回数学的考え方解答

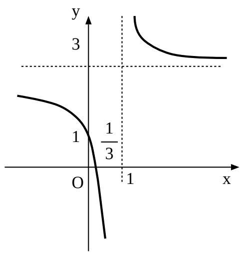
1 $y=-\frac{3}{2}$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフである。



2 (1) 漸近線の方程式は $x=1,\ y=3$

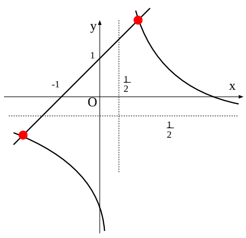
(2) 値域は定義域とグラフより $1\leq y<3,\ 3<y\leq 5$

(3) $x\leq -1,\ 1<x$



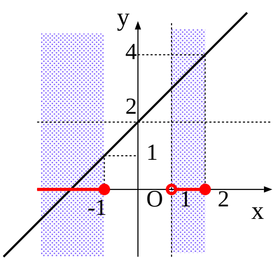
3 $\dfrac{3x-4}{x-1}$

4 漸近線は $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$ の分数関数となる。グラフより、交点の座標は (-2, -1), (1, 2)

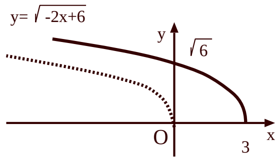


5 (a) グラフより、不等式をみたす x の値の範囲は $x\leq -1,\ 1<x\leq 2$

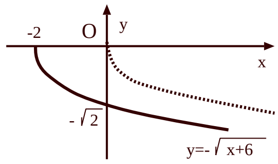
(b) $\frac{2x}{x-1}=kx+2$ が実数解を持つ。すなわち $kx^2-kx-2=0$ の実数解を持つ条件を調べればよい。この判別式を解くと、$k\neq 0$ より、$k\leq -8,\ 0<k$



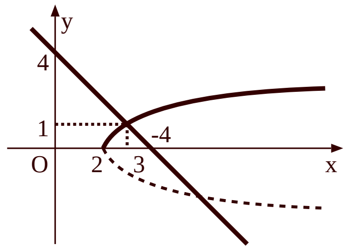
6 (1) $y=\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 3 だけ平行移動したグラフ



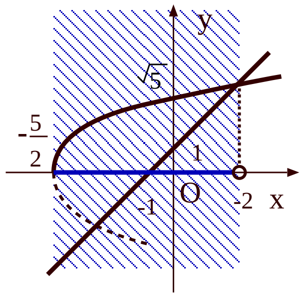
(2) $y=-\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したグラフ



7 グラフより (3, 1)



8 方程式の解 $x=1$, グラフより不等式の解は $-\frac{2}{5}\leq x<2$



9 $k<2$ のとき共有点 1 個, $2\leq k<\frac{11}{4}$ のとき共有点 2 個, $k=\frac{11}{4}$ のとき共有点 1 個, $\frac{11}{4}$ のとき共有点なし

10 (1) 2 に収束する。

(2) 負の無限大に発散する。

(3) 正の無限大に発散する。

11 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)=-\infty$

(3) 極限なし。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=2$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}=\infty$

(6) $-\dfrac{1}{2}$

(7) $\frac{1}{2}$

(8) 0

(9) ∞

(10) 9

12 (a) $|r|<1$ のとき

$r^{n+2}\to 0,\ r^{n+1}\to 0$。よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-r^{n+1}+1}{r^{n+1}+1}=1$

(b) $|r=1|$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-r^{n+1}+1}{r^{n+1}+1}=\frac{1}{2}$

(c) $|r|>1$ のとき分母、分子を r^{n+1} で割って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r-1+\frac{1}{r^{n+1}}}{1+\frac{1}{r^{n+1}}}=r-1$ (a) − (c) より、

$$\begin{cases} 1 & (|r|<1\text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (r=1\text{ のとき}) \\ r-1 & (|r|>1\text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $\lim_{x\to-\infty} 3^x = 0$

(2) $\lim_{x\to\infty} cos\frac{1}{x} = 1$

(3) $\lim_{x\to\infty} \log_3 \frac{1}{x} = -\infty$

(4) $\lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

(5) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\left(1-\frac{3}{x+3}\right) = \frac{1}{3}$

(6) $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+6}+x}{x+2} = \frac{5}{4}$

(7) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) = \frac{1}{2}$

(8) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x+3}+x) = -1$

(9) $\lim_{x\to1-0} \frac{x}{x-1}$

(10) 極限なし

(11) 極限なし

14 $a=4,\ b=-8$

15 $f(x)=(x-2)(3x+2)$

16 (1) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$

(2) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$

(3) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x} = -1$

(5) $\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$

(6) $\lim_{x\to1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = -\pi$

17 (1) $f(x)$ は $x=2$ で不連続である。

(2) $f(x)$ は $x=2$ で連続である。

18 (1) 中間値の定理により、方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$ は $1<x<2$ に少なくとも 1 つの実数解を持つ。

(2) 中間値の定理により、方程式 $x\cos x+\sin x+1=0$ は $0<x<\pi$ に少なくとも 1 つの実数解を持つ。

19 (1) i. $x>1$ のとき $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$

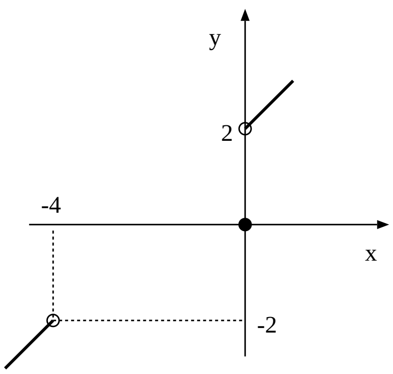
ii. $0<x<1$ のとき $f(x)=ax$

(2) $x=1$ で連続となるように a を定める。それぞれの $f(1)$ の値を調べ、$a=\frac{3}{2}$。

20 (a) i. $x=0$ のとき収束。

ii. $x\neq0$ のとき収束する x の範囲は $x<-4,\ 0\leq x$

(b) i.



ii. 関数 $f(x)$ は $x=0$ で不連続である。