第 3 回数学的考え方レポート

1 (1) 等差数列 $100, 97, 94, \cdots$ の一般項 a_n を求めよ。

(2) 調和数列 $\frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \cdots$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) 第 59 項が 70, 第 66 項が 84 の等差数列の一般項 a_n を求めよ。またこの数列において、初めて正になるのは第何項か。

2 一般項が $a_n = pn + q\,(p, q$ は定数, $pq \neq 0)$ である数列 $\{a_n\}$ において、次の問に答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを証明し、その初項と公差を求めよ。

(2) 一般項が $c_n = a_{3n}$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明し、その初項と公差を求めよ。

3 等差数列をなす 3 数があって、その和は 27, 積は 693 である。この 3 数を求めよ。

4 次のような和 S_n を求めよ。

(1) 項数 n の等差数列 $1, 4, 7, \cdots, (3n-2)$ の和

(2) 初項が 200, 公差 -5, 項数 100 の等差数列の和

(3) 第 8 項が 37, 第 24 項が 117 の等差数列の第 20 項から第 50 項までの和

5 (1) 数列 $a, b, 2, c, 18$ は各項が正の等比数列である。このとき、a, b, c の値を求めよ。

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ において、公差と公比が同じ値 $d(\neq 0)$ をとる。初項に関しても同じ値 $a_1 = b_1 = a(> 0)$ をとる。$a_3 = b_3,\ a_9 = b_5$ が成り立つとき、a, d の値を求めよ。

6 (1) 等比数列 $a, 3a^2, 9a^3, \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 3 項までの和は 35, 初項から第 6 項までの和は 315 である。この等比数列の一般項 a_n を求めよ。ただし、公比は実数であるとする。

7 年利率 r, 1 年ごとの複利とする。次のものを求めよ。

(1) n 年後に元利合計 S にするときの元金 T

(2) 毎年初めに P ずつ貯金し、n 年経過時の元利合計 S_n

8 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(4k^2-2k+1)$ を求めよ。

(2) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S を $\sum$ を用いて表し、S を求めよ。$1^2, 3^2, 5^2, \cdots$

9 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1,\ 1+4,\ 1+4+7, \cdots$

(2) $2,\ 1+2,\ 1+2+2^2, \cdots$

10 (1) $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 2\right)$ を計算せよ。

(2) 次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1), \cdots, (n-1)\cdot 2,\ n\cdot 1$

11 (1) 数列 $\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 7}, \cdots, \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ の和を求めよ。

(2) 数列 $1\cdot 1,\ 3\cdot 3,\ 5\cdot 3^2, \cdots, (2n-1)\cdot 3^{n-1}$ の和を求めよ。

12 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$2, 7, 18, 35, 58, \cdots$

13 次の数列の一般項を求めよ。

$6, 24, 60, 120, 210, 336, 504, \cdots$

14 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2n^2 - n$ となる数列 $\{a_n\}$ について

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 和 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$ を求めよ。

15 $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{5}, \cdots$ の分数の列について

(1) 分母が 10 である最初の分数の分子を求めよ。

(2) 初項から第 210 項までの分数の和を求めよ。

17 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = -1,\ a_{n+1} - a_n = 4$

(2) $a_1 = 4,\ 2a_{n+1} + 3a_n = 0$

(3) $a_1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n - 3n + 1$

18 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

(2) $a_1 = \frac{1}{4},\ 12a_{n+1} - 8a_n + 3 = 0$

19 n が自然数のとき、数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + n(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$

20 $a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{(n+1)}$ とする。

(1) $n = 1, 2, 3, 4$ に対して a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

第 2 回数学的考え方解答

1 (1) i. $\bar{A} = \{3, 5, 7, 9\}$

ii. $\bar{A} \cap B = \{3, 9\}$

iii. $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5, 7\}$

iv. $\bar{A} \cup \bar{B} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

(2) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9\}$

2 (1) Venn 図を書くと、$A \bar{\cap} B$ は () Venn 図を書くと、$\bar{A} \cup \bar{B}$ は () の斜線部分 () と () の斜線部分が一致するから、$A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$

(2) $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ $A \cap B = \{4, 16, 36, 100\}$ $A \cap B$ の要素はすべて 4 の倍数であるから $C \supset A \cap B$ よって $\bar{C} \subset A \bar{\cap} B$ したがって de Morgan の法則から $\bar{C} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

3 (1) $A \cap B \cap C = \{2, 4\}$

(2) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 16, 20\}$

(3) $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

(4) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 4, 8\}$

4 100 から 200 までの整数全体の集合を U とし、そのうち 5 の倍数、8 の倍数全体の集合をそれぞれ A, B とすると、$A = \{5{\cdot}20, 5{\cdot}21, \cdots, 5{\cdot}40\}$, $B = \{8{\cdot}13, 8{\cdot}14, \cdots, 8{\cdot}25\}$ ゆえに $n(A) = 40 - 20 + 1 = 21$, $n(B) = 25 - 13 + 1 = 13$

(1) 5 かつ 8 の倍数すなわち 40 の倍数全体の集合は $A \cap B$。$n(A \cap B) = 3$

(2) 5 または 8 の倍数全体の集合は $A \cap B$。$n(A \cup B) = 31$

(3) 5 でも 8 でも割り切れない整数全体の集合は $\bar{A} \cap \bar{B}$。$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(A \bar{\cup} B) = n(U) - n(A \cap B) = 70$

(4) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数全体の集合は $A \cap \bar{B}$。$n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cup B) = 18$

5 学生全体の集合を全体集合 U とし、数学が好きと答えた者の集合を A, 数学が得意と答えた者の集合を B とすると、$n(U) = 100$, $n(A) = 43$, $n(B) = 29$, $n(\bar{A} \cap \bar{B}) = 35$。

(a) $n(A \cup B) = n(U) - n(A \bar{\cup} B) = n(U) - n(\bar{A} \cap \bar{B}) = 65$ 人

(b) $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7$ 人

(c) $n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 36$ 人

6 (a) 8 (b) 48 (c) 0 (d) 40

7 $x = 5$

8 (1) 真 (2) 偽 (3) 偽 (4) 真 (5) 真

9 (1) i. 偽

ii. 真

(2) i. $x \geq 0$ または $y > 0$

ii. $-3 \leq x < 2$

iii. $a \neq 0$ または $b \neq 0$ または $c \neq 0$

10 (1) (a) (2) (d) (3) (b)

11 (1) **命題** 偽

否定 「ある実数 x について $x^2 \geq 0$」真

(2) **命題** 真

否定 「すべての素数は奇数である。」偽

(3) **命題** 偽

否定 「ある実数 x, y に対して $x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$」真

(4) **命題** 真

否定 「すべての自然数 x に対して $x^2 - 3x - 10 \neq 0$」偽

12 (1) **逆** 「$a > 0$ かつ $b > 0$」 ならば $a + b > 0$、真

裏 $a + b \geq 0$ ならば 「$a \geq 0$ または $b \geq 0$」、真

対偶 「$a \geq 0$ または $b \geq 0$」ならば $a + b \geq 0$、偽

(2) 対偶が真であるから、与えられた命題も真である。

13 $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ が無理数ではないと仮定し、$\sqrt{7}$ が無理数であることを使って、矛盾を導く。(背理法)

14 $\sqrt{7}$ が無理数でないと仮定すると、1 以外に公約数をもたない自然数 a, b を用いて $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ と表される。このとき $a = \sqrt{7}b$。両辺を 2 乗して $a^2 = 7b^2$。よって a^2 は 7 の倍数である。したがって、a も 7 の倍数であるから、自然数を c として、$a = 7c$ と表される。この両辺を 2 乗すると $a^2 = 49c^2$ よって、b^2 は 7 の倍数であるから、b も 7 の倍数である。ゆえに a と b は公約数 7 をもつ。これは a と b が 1 以外に公約数を持たないことに矛盾する。よって $\sqrt{7}$ は無理数である。

15 (1) $b \neq 0$ と仮定すると、$a + b\sqrt{2} = 0$ から $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b}$。a, b は有理数であるから、この右辺は有理数であるが、左辺は無理数であり、これは矛盾する。したがって $b = 0$。このとき $a + b\sqrt{2} = 0$ から $a = 0$。すなわち a, b が有理数のとき、$a + b\sqrt{2} = 0$ ならば $a = b = 0$。

(2) $x = 5$, $y = 3$

16 a, b はともに 3 の倍数でないと仮定すると、a と b は $3k + 1$ または $3l + 2$ (k, l は整数) と表される。ここで、$(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, $(3l + 2)^2 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1$ より、3 の倍数でない数 a, b の 2 乗を 3 で割った余りはともに 1 である。したがって $a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 2 となる。[] 一方、c が 3 の倍数のとき、c^2 は 3 で割り切れ、c が 3 の倍数でないとき、c^2 を 3 で割った余りは 1 である。すなわち c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 となる。[] よって、(), () は $a^2 + b^2 = c^2$ であることに矛盾する。ゆえに $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、a, b のうち、少なくとも 1 つは 3 の倍数である

17 (1) i. 連続した 2 つの整数を $n, n + 1$ とすると、n が偶数のとき $n + 1$ は奇数で、n が奇数のとき $n + 1$ は偶数である。よって、積 $n(n + 1)$ は 2 の倍数である。

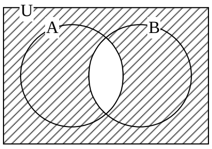

図 1: $A \bar{\cap} B$

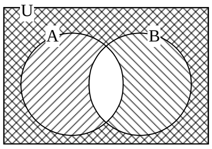

図 2: $\bar{A} \cup \bar{B}$

ii. 連続した 3 つの整数を $n, n+1, n+2$ とすると、(a) より、$n(n+1)$ は 2 の倍数である。また、$n, n+1, n+2$ のいずれか 1 つは 3 の倍数である。よって、$n(n+1)(n+2)$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数、すなわち 6 の倍数である。

(2) $2n^3+3n^2+n = 2(n-1)n(n+1)+3n(n+1)$ (1) より、$2(n-1)n(n+1) = 6k$, $n(n+1) = 2l$ (k, l は整数) とおけるから、与式は 6 の倍数である。

18 $f(x) = a^x + bx + c$ とする。条件より、$f(0) = c$, $f(1) = a+b+c$, $f(-1) = a-b+c$ が偶数であるから、l, m, n を整数として $c = 2l$, $a+b+c = 3m$, $a-b+c = 2n$ とおける。これから

$$a+b = 2(m-l),\ a-b = 2(n-l),\ c = 2l \tag{1}$$

(1) が成り立つとき、$a = m+n-2l$, $b = m-n$, $c = 2l$ また、すべての整数 x は $2k$ または $2k+1$ (k は整数) で表され、$f(2k) = (m+n-2l)(2k)^2 + (m-n)\cdot 2k + 2l$, $f(2k+1) = (m+n-2l)\cdot 2(2k^2+2k) + (m-n)\cdot 2k + 2m$ ゆえに、$f(2k)$, $f(2k+1)$ はともに偶数である。すなわちすべての整数 x について $f(x)$ の値は偶数である。よって求める必要十分条件は (1) が成り立つこと、すなわち $a+b$, $a-b$, c がともに偶数になることである。

19 $n = 5k + r$ (k, r は整数, $0 \leq r \leq 4$) とすると $n^5 = 5(625k^5 + 625k^4r + 250k^3r^2 + 50k^2r^3 + 5kr^4) + r^5$ したがって n^5 を 5 で割った余りは r^5 を 5 で割った余りに等しい。n^5 を 5 で割った余りを r' とすると、

$$r = 0 \quad \text{ならば} \quad r' = 0 \tag{2}$$
$$r = 1 \quad \text{ならば} \quad r' = 1 \tag{3}$$
$$r = 2 \quad \text{ならば} \quad r' = 2 \tag{4}$$
$$r = 3 \quad \text{ならば} \quad r' = 3 \tag{5}$$
$$r = 4 \quad \text{ならば} \quad r' = 4 \tag{6}$$

(2) ～ (6) において、仮定はすべての場合をつくしており、また、結論はどの 2 つも同時に成り立つことはない。よって、転換法によって (2) ～ (6) の逆はすべて成り立つ。すなわち $r = 0, 1, 2, 3, 4$ に対し、n^5 を 5 で割った余りが r ならば n を 5 で割った余りでも r である。

20 (1) $a^2 - b^2 = n$ より、

$$(a-b)(a+b) = n \tag{7}$$

a, b が 0 以上の整数のとき、$a+b$, $a-b$ も整数で、$a+b \geq a-b$, $a+b \geq 0$ である。また、n は 2 より大きい素数であるから、(7) を満たすのは $a+b = n$, $a-b = 1$ すなわち $a = \dfrac{n+1}{2}$, $b = \dfrac{n-1}{2}$ のときだけである。ここで、n は 2 より大きい素数である奇数で、$n+1$, $n-1$ は正の偶数である。ゆえに、a, b は 0 以上の整数となる。

(2) $a^2 - b^2 = n$ より、

$$(a-b)(a+b) = n \tag{8}$$

n は奇数であり、素数でないから、$n = pq$ となる奇数 p, q ($n > p \geq q > 1$) が存在する。よって (8) を満たす $a+b$, $a-b$ の 1 つは $a+b = q$, $a-b = q$ すなわち $a = \dfrac{p+q}{2}$, $b = \dfrac{p-q}{2}$ このとき、a, b は 0 以上の整数となる。