

- 1 得点 x_k を取った人数を f とすると、次の度数分布表を得た。平均値を求めよ。

x_k	85	95	105	115	125	135	145	計
f	4	3	8	12	7	4	2	40

- 2 右の度数分布表は高校 1 年男子 44 人の座高について調べた結果である。これについて、

(1) 分散 (2) 標準偏差

を求めよ。

座高 (cm)	人数 (人)
(以上)(未満)	
82.5 ~ 84.5	5
84.5 ~ 86.5	9
86.5 ~ 88.5	11
88.5 ~ 90.5	11
90.5 ~ 92.5	6
92.5 ~ 95.5	2

- 3 $(x + \frac{1}{x})^9$ の展開式における定数項を求めよ。

- 4 10 本のくじがあって、そのうち 2 本が当たりくじとする。2 本引いて当たったくじの本数を X とするとき、 X 本当たる確率 p_X を求めよ。

- 5 3 面に数字 1 を刻み、他の 3 面にそれぞれ 2, 3, 4 の数字を刻んだサイコロがある。このようなサイコロ 2 個を同時に振って出た目の和の期待値すなわち和の平均値を求めよ。ただし、このサイコロのどの面の現われる見込みも同等であるとする。

- 6 数字 0, 1, 2 を 1 つずつ記入した 3 枚のカードの中から任意に 1 枚を抜き取ってカードに記入された数字 X を読む。次にそのカードをもとに戻して、さらに 1 枚を抜き取ってカードに記入された数字 Y を読む。このとき $Z = XY$ として、

(1) Z のとるそれぞれの値に対する確率を求めよ。

(2) それぞれの確率変数 Z の平均値と分散を求めよ。

- 7 サイコロを 5 回振って、偶数の目が出る回数を確率変数にとるとき、その確率分布を求めよ。

- 8 白球を 3 個、赤球が 7 個入っている袋から 1 個を取りだして元に戻すことを 4 回くり返すとき、白球が出る回数を X とする。 X の平均値を求めよ。

- 9 A, B 2 人がサイコロを振り、出た目が一致すれば A の勝ちとする。90 回勝負してそのうち A の勝った回数を X とするとき、 X の分散を求めよ。

- 10 50 本のくじに 3 本の当たりくじがある。4 回引いたときに当たる回数を X とする。 X の標準偏差を求めよ。ただし、引いたくじは元に戻すものとする。

- 11 受講者 288 人の公益概論の試験を行ったところ、平均点は 62 点で、標準偏差は 6 点であった。Chebyshev の不等式を用いて、50 点以上で 74 点以下の生徒数は何人より多いと言えるか。

- 12 確率変数 X は平均 10, 標準偏差 2 の正規分布に従うとき、 X の確率密度関数を書け。

第 13 回統計の考え方解答

1 二項分布 $B(3, p)$ の分散を σ とすると、 $\sigma = \sqrt{3p(1-p)}$

2 $B(20, \frac{1}{5})$ の分散は $\sigma^2 = 20 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ である。標準偏差は $\sigma = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

3 くじを引いて当たる確率は $\frac{1}{20}$ で、10 回引いたときに X 回当たる確率は ${}_4C_X \left(\frac{1}{20}\right)^X \left(\frac{19}{20}\right)^{10-X}$ となる。
よって二項分布 $B(10, \frac{1}{20})$ に従うから、標準偏差 $\sigma = \sqrt{10 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20}} = \frac{\sqrt{190}}{20}$

4 確率密度関数 $f(x)$ とすると、 $m = 10$, $\sigma = 2$ なので、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x-10)^2}{2 \cdot 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

5 $N(0,1)$ となるような確率変数 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ なる σ, m を探せばよい。与式を変形すると、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sqrt{2}^2}}$$

なので、平均 $m = 5$, 標準偏差 $\sigma = \sqrt{2}$ である。従って変数変換 $Z = \frac{X-5}{\sqrt{2}}$ を行くと $N(0,1)$ となる。

6 標準測度 $t = \frac{x-m}{\sigma}$ の式に実際に K 君の成績を当てはめて調べてみる。 $t_{\text{数}} = \frac{70-56}{12.4} = 1.1$, $t_{\text{英}} = \frac{76-69}{8.2} = 0.85$ を比較して、数学の方が上位であることが分かる。

7 $m = 5$, $\sigma = \sqrt{2}$ より、 $3 < X < 7$ を変形し、 $-2 < X - 5 < 2$ を得る。従って $|X - 5| < 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
Chebyshev の不等式と比較すると $k = \sqrt{2}$ 従って $P(|X - 5| < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}$

8 平均 $m = 50$, 標準偏差 $\sigma = 14$ より、上限と下限は $m \pm 2\sigma$ で表されることが分かる。Chebyshev の不等式で $k = 2$ として、 $P(|X - 50| \leq 2 \cdot 14) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ よって $P(22 \leq X \leq 78)$ は $\frac{3}{4}$ より大きい。

9 平均 62 からの差を考えると、ちょうど 12 点の差のある得点の上限 $74 = 62 + 12$ と下限 $50 = 62 - 12$ である。 $12^2 \leq k^2 \cdot 6^2$ より、 $k^2 \geq 4$ を得る。従って、 $\frac{n}{288} > 1 - \frac{1}{k^2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ となるので、 $n > \frac{3}{4} \cdot 288 = 216$ となり、216 人より多いことが分かる。

10 $\sigma(X)^2$ を求める式を思い出すと、 $\sigma(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ であるから、 $E(X^2) = \sigma(X)^2 + E(X)^2 = 10^2 + 80^2 = 6500$

11 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ であるので、期待値 $E(Z)$ は

$$E(Z) = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma}\right) - E\left(\frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0$$

$$\text{また、}\sigma(X)^2 = \sigma\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right)^2 = \sigma\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sigma(X)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

よって $\sigma(X)^2 = 1$ である。 Z が正規分布に従うという仮定より、 Z は正規分布 $N(0,1)$ に従う。ここで、 $\sigma\left(\frac{m}{\sigma}\right) = 0$ を用いた (全て同じ値である統計の分散はゼロ)。