第 12 回統計の考え方レポート

1 4 枚の硬貨を同時に投げる試行を 4 回繰り返すとき、2 枚が表で 2 枚が裏となる回数 X の確率分布を求めよ。また X の平均値を求めよ。

2 ある機械で生産される製品のうち、10% は不良品であるという。この機械で 10 個の製品を作る。そのうちの不良品の数を S_{10} とするとき、次のものを求めよ。

(1) $P(S_{10} = 8)$

(2) E_{10}

3 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を T とする。 1 回の試行 T でさいころが 2 個とも偶数の目の出る事象を A とする。試行 T を繰り返すとき、n 回目に事象 A が起これば $X_n = 1$ 事象 A が起こらなければ $X_n = 0$ とし、$S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ とする。S の期待値 (平均値) $E(S)$ を求めよ。

4 二項分布 $B(2, p)$ について、分散を定義にしたがって求めよ。

5 二項分布 $B(10, \frac{1}{4})$ の分散 σ^2 と標準偏差 σ を求めよ。

6 A, B 2 人がサイコロを振り、出た目が一致すれば A の勝ちとする。90 回勝負してそのうち A の勝った回数を X とするとき、X の分散を求めよ。

7 50 本のくじに 3 本の当たりくじがある。4 回引いたときに当たる回数を X とする。X の標準偏差を求めよ。ただし、引いたくじは元に戻すものとする。

8 1 つのサイコロを 10 回振るとき、1 の目が出る回数を表す確率変数を X とする。

(1) $X = k \quad (0 \leq k \leq 10)$ となる確率 $P(X = k)$ を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

(3)

$$\sum_{k=0}^{10} k^2 P(X = k)$$

の値を求めよ。

9 二項分布 $P(k) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (p + q = 1, \quad 0 < p < 1, \quad k = 0, 1, \cdots, n)$ に対して、

$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x - k)^2 P(k)$ とおくとき、$f(x)$ の最小値を n と p を用いて表せ。

第 11 回統計の考え方解答

1 (1) n 回目に A の赤球が 0 個になるのは $(n-1)$ 回目に A, B とも赤、白の球が各々 1 個の状態になっていて、次の操作で A の赤と B の白が交換される場合である。$p_n = q_{n-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}q_{n-1}$ であり、同様に r_n も $r_n = \frac{1}{4}q_{n-1}$ となる。また、$q_n = 1-(p_n+r_n)$ であるので、$q_n = 1-\frac{1}{2}q_{n-1}$ となる。この式から $q_n = \frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ したがって $p_n = r_n = \frac{1}{12}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$

(2) $E(X_n) = 0\cdot p_n + 1\cdot q_n + 2\cdot r_n = 1$ よって $V(X_n) = (0-1)^2p_n + (1-1)^2q_n + (2-1)^2r_n = p_n + r_n = \frac{1}{6}\left\{2+\left(-1\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$ である。ちなみに無限回実行すると $\lim_{n\to\infty} V(X_n) = \dfrac{1}{3}$

2

X	0	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

3 10 回のうち r 回 1 の目が出る確率を W_r とすると、$W_r = {}_10C_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{10-r} = {}_{10}C_r\frac{5^{10-r}}{6^{10}}$ ゆえに W_r を最大にする r を求めるには ${}_{10}C_r5^{10-r}$ を最大にする r を求めればよい。

$$\begin{aligned} \frac{W_{r+1}}{W_r} &= \frac{{}_{10}C_{r+1}5^{10-(r+1)}}{{}_{10}C_r5^{10-r}} = \frac{{}_{10}C_{r+1}5^r}{{}_{10}C_r5^{r+1}} = \frac{10\cdot 9\cdot\cdots(11-r)(10-r)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot r(r+1)} \times \frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot r}{10\cdot 9\cdot\cdots\cdot(11-r)} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{10-r}{r+1}\times\frac{1}{5} \end{aligned}$$

よって $(10-r)-5(r+1) = 5-6r < 0$ すなわち、1 回起こることがもっとも確からしい。

4 $x = r$ となる確率は ${}_nC_rp^rq^{n-r}$ である。

(1) 平均は定理に従って、

$$\begin{aligned} E(x) &= 1{}_nC_1pq^{n-1} + 2{}_nC_2p^2q^{n-2} + \cdots + n{}_nC_np^n \\ &= 1\cdot\frac{n}{1}pq^{n-1} + 2\cdot{}_nC_2p^2q^{n-2} + \cdots + n\cdot\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot\cdots 2\cdot 1}p^n \\ &= npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1}p^2q^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}{(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}p^n \\ &= np\left\{q^{n-1} + \frac{n-1}{1}pq^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)\cdot\cdots 1}{(n-1)\cdot\cdots\cdot 1}p^n\right\} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np\cdot 1^{n-1} = np \end{aligned}$$

である。二項定理を参照せよ。

(2) $\sigma = \sqrt{npq}$

5 1 つのエンジンが故障しない確率は $p = 1-q$ である。2 つのエンジンが飛行可能である確率は、故障を起こさないエンジンが 2 個のときと 1 個のときなので、0 個以外の確率すなわち $1-($2 個とも故障する確率$) = 1-q^2$ となる。4 つのエンジンをもつときには飛行可能の確率が、$1-($0 個故障のときの確率$)-($1 個故障のときの確率$) = 1-q^2-4pq^3 = 1-4q^2+3q^4$ となる。2 つのエンジンの飛行機が、4 つのものよりも安全なときは、$1-q^2 > 1-4q^3+3q^4$ となる。これを解いて、$q > \frac{1}{3}$

6 サイコロを振ったとき、6 の目の出る確率 p は $p = \frac{1}{6}$ より、$q = \frac{5}{6}$ となる。そこで、

(1) $B(30, \frac{1}{6})$

(2) $B(300, \frac{1}{6})$

(3) $B(3000, \frac{1}{6})$

7 $n = 10, p = \frac{1}{5}$ であるので、$E(X) = 10\cdot\frac{1}{5} = 2$

8 表が出る確率も裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ である。X 回出る確率は ${}_{20}C_X\left(\frac{1}{2}\right)^X\left(\frac{1}{2}\right)^{20-X}$ すなわち二項分布に従うので、 $B(20, \frac{1}{2})$ となる。よって、$E(X) = np = 20\cdot\frac{1}{2} = 10$

9 白球が出る回数 $X = x$ とすると、$p_x = {}_4C_x\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{4-x}$ 従って、確率変数 X は、二項分布 $B(4, \frac{3}{10})$ に従う。よって平均値は $E(X) = 4\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{5}$