

第 11 回統計の考え方レポート

- 1 A, B 2 つの箱があり、A には赤球が 2 個、B には白球が 2 個入っている。今、両方の箱から同時に 1 個ずつ取りだして、取りだした球を入れ替えることにする。この試行を n 回くりかえしたときの A の中にある赤球の個数を確率変数 X_n とし、 X_n がそれぞれ 0, 1, 2 の値をとる確率をそれぞれ p_n , q_n , r_n とする。
 - (1) p_n , q_n , r_n の値を求めよ。
 - (2) X_n の分散 $V(X_n)$ を求めよ。
- 2 サイコロを 5 回振って、偶数の目が出る回数を確率変数にとるとき、その確率分布を求めよ。
- 3 サイコロを 10 回振るとき、1 の目が何回出る場合がもっとも確からしいか。
- 4 1 回の試行で事象 A の起こる確率を p , 起こらない確率を $q(=1-p)$ とする。この事象 A の起こる回数を x とするとき、
 - (1) x の平均を求めよ。
 - (2) x の標準偏差を求めよ。
- 5 飛行機のエンジンが飛行中故障を起こす確率は q で、エンジンの少なくとも半数が動いていれば飛行を続けることができるものとする。また、1 つのエンジンの故障は他のエンジンに影響を与えないものとする。2 つのエンジンの飛行機の方が、4 つエンジンの飛行機より安全なのは q がどんな値のときか。
- 6 1 つのサイコロを次の回数だけ振ったとき、6 の目が出る回数 X を確率変数とする。B(n,p) の形で表せ。
 - (1) 30 回
 - (2) 300 回
 - (3) 3000 回
- 7 $B(10, \frac{1}{5})$ について平均を求めよ。
- 8 硬貨を 20 回投げるとき、表が出る回数の平均を求めよ。
- 9 白球を 3 個、赤球が 7 個入っている袋から 1 個を取りだして元に戻すことを 4 回くり返すとき、白球が出る回数を X とする。 X の平均値を求めよ。

第 10 回統計の考え方解答

- 1 (1) カードの総数は、 $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$ であり、 k と書いたカードが k 枚あるため、
$$p_k = \frac{k}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2k}{n(n+1)}$$
 - (2) 平均値は期待値に等しい。
$$1 \cdot \frac{2 \cdot 1}{n(n+1)} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{n(n+1)} + \cdots + n \cdot \frac{2 \cdot n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{2n+1}{3}$$
 - (3) 標準偏差 σ に対して

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{2n+1}{3}\right)^2 p_k = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - 2 \frac{2n+1}{3} \cdot k + \frac{(2n+1)^2}{9} k\right) \\&= \frac{2}{n(n+1)} \left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2 \frac{2n+1}{3} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{9} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\&= \frac{(n+2)(n-1)}{18}\end{aligned}$$

$$\text{よって } \sigma = \frac{\sqrt{2(n+2)(n-1)}}{6}$$

- 2 全部で 9 個のうち、5 個を取り出す場合の数は ${}_9C_5$ である。赤球の含まれない場合の数は 0 で、1 個含まれる場合の数は、残りの 4 球の組み合わせは 1 通り ($= {}_4C_4$) であるため、 ${}_4C_4 \cdot {}_5C_1 = 5$ 通り。2 個含まれるときは ${}_4C_3 \cdot {}_5C_2 = 40$ 通り。このように求めて、確率分布表は以下の通りとなる。

X	0	1	2	3	4	5	計
$p(X)$	0	$\frac{5}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

- 3 160 を仮平均にとり、 $(152.5 - 160) \times 3 + (157.5 - 160) \times 6 + (162.5 - 160) \times 32 + \dots = 330$ よって、 $160 + \frac{330}{70} = 164.7$
- 4 目の和とその確率を表にする。

目の和	場合とその確率			
2	1 と 1	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$		
3	1 と 2	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) \times 2$		
4	1 と 3	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) \times 2$	2 と 2	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
5	1 と 4	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) \times 2$	2 と 3	$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) \times 2$
6	2 と 4	$\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times 2$	3 と 3	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
7	3 と 4	$\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times 2$		
8	4 と 4	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$		

ゆえに、求める平均値は

$$2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{2}{9} + 6 \times \frac{1}{12} + 7 \times \frac{1}{18} + 8 \times \frac{1}{36} = 4$$

- 5 1 の目が出る回数の平均値は、 $10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$
- 6 20 年後も夫も妻もともに死亡している確率は $(1 - 0.15) \times (1 - 0.2) = 0.68$ であるので、少なくとも一方が生きている確率は 0.32 である。ゆえに X の平均値は $10 \times 0.32 = 3.2$
- 7 $1, 2, 3, \dots, 20$ から 2 つ選んで加えた数の期待値を求めればよい。まず 2 つ選ぶ選び方は ${}_{20}C_2 = 190$ 通りある。その和は 1 から 20 までの数がそれぞれ 19 回ずつ出現するものに等しい。 $1 + 2, 1 + 3, \dots, 1 + 20, 2 + 3, 2 + 4, \dots$ と実際に並べてみると分かる。求める数は $\frac{1}{190} \{(1 + 2 + \dots + 20) \times 19\} = 21$

- 8 期待値を $E(X)$ とすると、 $E(X) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)}{2}$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

より $V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left\{\frac{(n+1)}{2}\right\}^2 = 10$ であるということだから、 $n^2 = 121$ を得る。これを満たす $n > 0$ なる n は $n = 11$

- 9 (1) A が勝って終了するのは、はじめの 3 回が A の 2 勝 1 敗となる時。その確率は $({}_3C_2 p^3 q) \cdot p = 3p^3 q$ 同様に B が勝って終了する確率も $3pq^3$ である。4 セットで終了する確率は $3p^3 q + 3pq^3 = 3pq(p^2 + q^2)$ となる。
- (2) 3 勝すれば試合終了。 $X = 3, 4, 5$ の場合を取り得る。確率分布は以下のようになる。

X	3	4	5
$P(X)$	$p^3 + q^3$	$3pq(p^2 + q^2)$	$6p^2 q^2$

- (3) $p = q = \frac{1}{2}$ であるので、

X	3	4	5
$P(X)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

 したがって、 $E(X) = 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$

- 10 (1) Z と X, Y の値を表にすると以下の通り。

Z	0				1	2	4
X	0	0	1	2	0	1	2
Y	0	1	0	0	2	1	2

分布表は下のようになる。

Z	0	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

- (2) $E(Z) = 0 \times \frac{5}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = 1$, $E(Z^2) = 0^2 \times \frac{5}{9} + 1^2 \times \frac{1}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} = \frac{25}{9}$ となり、 $V(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2 = \frac{25}{9} - 1^2 = \frac{16}{9}$