

第 10 回統計の考え方レポート

- 1 1 と書いたカードを 1 枚、2 と書いたカード 2 枚、...、 n と書いたカード n 枚 がある。この中から 1 枚のカードを取りだすとき、カードの示す数 X を確率変数とする。

- (1) $X = k$ である確率 p_k を求めよ。
- (2) X の平均値 m を求めよ。
- (3) X の標準偏差 σ を求めよ。

- 2 白球 4 個、赤球 5 個が入っている袋の中から 5 個取りだすとき、赤球の含まれる個数の確率分布を求めよ。

- 3 ある体格検査で次のような身長の数値分布表が得られた。これから平均の身長を求めよ。

身長 (cm)	人数
150 - 155	3
155 - 160	6
160 - 165	32
165 - 170	17
170 - 175	10
175 - 180	2

- 4 3 面に数字 1 を刻み、他の 3 面にそれぞれ 2, 3, 4 の数字を刻んだサイコロがある。このようなサイコロ 2 個を同時に振って出た目の和の期待値すなわち和の平均値を求めよ。ただし、このサイコロのどの面の現われる見込みも同等であるとする。

- 5 サイコロを 10 回振るとき、1 の目が出る回数の平均値を求めよ。

- 6 50 歳の夫と 48 歳の妻が 20 年後まで生存する確率は、夫が 0.15、妻が 0.2 である。現在夫が 50 歳、妻が 48 歳である 10 組の夫婦が 20 年後に、夫婦のうち少なくとも 1 方が生存している組の数を X とする。 X が二項分布に従う確率変数であるとして、 X の平均値を求めよ。

- 7 袋の中に 20 枚のカードが入っている。それぞれ、1, 2, 3, ..., 20 の数字が記入されている。最初に抽出した 1 枚の数値を X_1 とし、残りから抽出した数値を X_2 とする。 $X_1 + X_2$ の期待値 (平均値) を求めよ。

- 8 X は 1, 2, ..., n を等しい確率で取る確率変数であって、分散は 10 である。このとき n を求めよ。

- 9 あるバレーボールの試合では、どちらかのチームが 3 セット先に勝つと試合が終了する。今、A, B 両チームがこのバレーボールの試合を行うとき、1 セットの勝負で A が B に勝つ確率を p 、負ける確率を q ($p + q = 1$) とするとき、 p はこの試合を通して一定で、各セットの勝負は独立であるとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) この試合が 4 セットで終了する確率
- (2) この試合が終了するまで要するセット数を X とするときの X の確率分布
- (3) この試合で $p = \frac{1}{2}$ とするとき (2) の X の平均値と標準偏差

- 10 数字 0, 1, 2 を 1 つずつ記入した 3 枚のカードの中から任意に 1 枚を抜き取ってカードに記入された数字 X を読む。次にそのカードをもとに戻して、さらに 1 枚を抜き取ってカードに記入された数字 Y を読む。このとき $Z = XY$ として、

- (1) Z のとるそれぞれの値に対する確率を求めよ。
- (2) それぞれの確率変数 Z の平均値と分散を求めよ。

第 9 回統計の考え方解答

- 1 パスカルの三角形は出席カードを参照。

(1) の場合、 $(a+b)^2 = {}_2C_0a^2 + {}_2C_1ab + {}_2C_2b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ など。(2), (3) も (1) と同様に地道に計算し、パスカルの三角形と同じ形であることを示してあげればよい。

- 2 一般項は ${}_9C_r(x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_9C_rx^{18-3r}$ と書ける。定数項を表すということは、 x を含まない項のことであるから、 $18-3r=0$ よって、 $r=6$ 。従って求める項は ${}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$
- 3 与式の展開式において、一般項は ${}_nC_r(2x^3)^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = 2^{n-r}{}_nC_rx^{3n-5r}$ である。 x を含まない項は $3n-5r=0$ のときである。これを満たす最小の n は 5 で、 r は 3 である。求める項は $2^{5-3}{}_5C_3 = 40$ よって、 $n=5$ のときで、その項の値は 40 である。
- 4 与式の展開式における一般項が ${}_{10}C_r1^{10-5}(2x)^r = 2^r{}_{10}C_rx^r$ で与えられる。となりあう係数の差が初めて負になったとき、すなわち $f(r+1) - f(r) < 0$ となるとき、その r が最大係数の値となる。 $\frac{f(r+1)}{f(r)} < 1$ かどうかを調べる。

$$\frac{2^{r+1}{}_{10}C_{r+1}}{2^r{}_{10}C_r} = 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdots (11-r) \cdot (10-r)}{(r+1) \cdot r \cdots 2 \cdot 1} = 2 \frac{10-r}{r+1} < 1$$

これを解いて、 $\frac{19}{3} < r$ 数直線から $r=7$ のとき。

- 5 一般項は ${}_{10}C_r2^{10-r}(3x)^r = {}_{10}C_r2^{10-r}3^rx^r$ である。係数を $f(r)$ とおくと、

$$\frac{f(r+1)}{f(r)} = \frac{{}_{10}C_{r+1}2^{9-r}3^{r+1}}{{}_{10}C_r2^{10-r}3^r} = \frac{10-r}{r+1} \cdot \frac{3}{2} < 1$$

なる r が求める r である。 $\frac{28}{5} < r$ となり、数直線から、 $r=6$ である。

- 6 (1) $x+y=1$ より、 $(n+1)yx^n = (n+1)(1-x)x^n$ となる。 $f(x) = (n+1)(1-x)x^n$ を考えると、 $x > 0$ より、 $f'(x) = 0$ なる x で最大最小を取る。 $f'(x) = (n+1)x^{n-1}\{n - (n+1)x\}$ である。従って、関数の極値を

x		$\frac{n}{n+1}$	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		↗	↘

ただし最大は $f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(2)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} = 1 + n \times \frac{1}{n} = 2$$

展開した第 2 項以降は、必ず正の数の和となるため。等号は $n=1$ のとき。

- (3) (2) より、 $\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 2$ であるので、 $\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{2}$ ところが、(1) からは、 $(n+1)yx^n \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)$ となる。これらの結果を合わせて、 $(n+1)yx^n \leq \frac{1}{2}$ となる。等号は $n=1$ のとき。

- 7 どの目が出る確率も $\frac{1}{6}$

- 8 当たりくじの数で求めるので $p_3 = 0$ $p_2 = \frac{{}_2C_2 \cdot {}_8C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{15}$, $p_1 = \frac{{}_2C_1 \cdot {}_8C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15}$, $p_0 = \frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15}$ となる。確率分布表は

X	0	1	2	3	計
p_X	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	1

- 9 X は 0, 1, 2 の値をとり、その確率は $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ となる。確率分布表は

X	0	1	2	計
p_x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

- 10 2 つのさいころの目の和は 2, 3, ..., 12 の値をとる。場合の数を数えると以下になる。

目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
場合の数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

確率分布表は場合の数を全体の組み合わせ $6^2 = 36$ で割ることによって得られる。

目の和 X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
$p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

約分を実行してあっても正解とする。数の数え方をみせるため、ここでは約分していない。