

第 13 回統計の考え方レポート

- 1 二項分布 $B(3, p)$ について、分散を求めよ。
- 2 二項分布 $B(20, \frac{1}{5})$ の分散 σ^2 と標準偏差 σ を求めよ。
- 3 100 本のくじの中に 5 本の当たりくじがある。10 回引いたとき当たる回数を X とする。 X の標準偏差を求めよ。ただし、引いたくじはもとに戻すものとする。
- 4 確率変数 X が平均 10, 標準偏差 2 の正規分布に従うとき、 X の確率密度関数を書け。
- 5 確率密度関数が $f(x) = \sqrt{12}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(x-5)^2}{4}}$ で与えられる正規分布を標準化せよ。
- 6 クラスの者の英語と数学の成績を調べたら次の表のようになった。
K 君の成績は英語 76 点、数学 70 点であった。クラスの中の成績順位からいうと、K 君は英語と数学とではどちらが上位にあると考えられるか。

	英語	数学
平均点	69 点	56 点
標準偏差	8.2 点	12.4 点
- 7 平均が 5, 分散が 2 の確率分布で、変数区間が $(3, 7)$ に属する確率は $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ。
- 8 確率変数 X が平均 50, 標準偏差 14 であるとき、確率 $P(22 \leq X \leq 78)$ の範囲を求めよ。
- 9 受講者 288 人の公益概論の試験を行ったところ、平均点は 62 点で、標準偏差は 6 点であった。Chebyshev の不等式を用いて、50 点以上で 74 点以下の生徒数は何人より多いと言えるか。
- 10 確率変数 X が平均 80, 標準偏差 10 の正規分布に従うとき、確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ を求めよ。
- 11 確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ も正規分布に従うことが分かっている。このとき、 Z の分布が $N(0, 1)$ となることを示せ。
- 12 ある工場で大量生産されている電球の中から無作為に抽出した 25 個について試験したところ、それらの寿命の平均値は 1500 時間であった。製品全体の平均寿命を信頼度 95 % で推定せよ。また、信頼度 99 % で推定せよ。ただし、製品の寿命は正規分布に従い、標準偏差は 110 時間であったとする。
- 13 ある製品 1 万個の長さは平均 69 cm, 標準偏差 0.4 cm の正規分布に従っている。長さが 70 cm 以上の製品は不良品とされるとき、この 1 万個の製品の中には何個の不良品が含まれると予想されるか。
- 14 数字 0, 1, 2 を 1 つずつ記入した 3 枚のカードの中から任意に 1 枚を抜き取ってカードに記入された数字 X を読む。次にそのカードをもとに戻して、さらに 1 枚を抜き取ってカードに記入された数字 Y を読む。このとき $Z = XY$ として、
 - (1) Z のとるそれぞれの値に対する確率を求めよ。
 - (2) それぞれの確率変数 Z の平均値と分散を求めよ。
- 15 白球を 3 個, 赤球が 7 個入っている袋から 1 個を取りだして元に戻すことを 4 回くり返すとき、白球が出る回数を X とする。 X の平均値を求めよ。
- 16 A, B 2 人がサイコロを振り、出た目が一致すれば A の勝ちとする。90 回勝負してそのうち A の勝った回数を X とするとき、 X の分散を求めよ。
- 17 50 本のくじに 3 本の当たりくじがある。4 回引いたときに当たる回数を X とする。 X の標準偏差を求めよ。ただし、引いたくじは元に戻すものとする。
- 18 (1) 確率変数 X が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、次の確率を求めよ。
 - i. $P(0.3 \leq X \leq 1.8)$
 - ii. $P(X \leq -0.5)$(2) 確率変数 X が正規分布 $N(36, 4^2)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

i. $P(X \geq 42)$

ii. $P(30 \leq X \leq 38)$

19 「次の 5 つの文章のうち正しいもの 2 つに丸をつけよ。」という問題がある。今、解答 1600 人が各人考えることなくでたらめに 2 つの文章を選んで丸をつけたとする。このとき、1600 人中 2 つとも正しく丸をつけた者が 130 人以上 175 人以下となる確率を、四捨五入によって小数第 2 位まで求めよ。

20 ある県において、参議院議員の選挙の有権者の A 政党の支持率は 48 % である。この県の有権者の中から無作為に 100 人を抽出するとき、 k 番目に抽出された人が A 政党支持なら 1, 不支持なら 0 を対応させる確率変数を X_k とする。

(1) $X_1, \dots, X_{100}$ の標本平均 $\bar{X}$ について、期待値 $E(\bar{X})$ と標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ を求めよ。

(2) $\sigma(\bar{X})$ を 0.03 以下にするためには、抽出される標本の大きさは少なくとも何人以上必要であるか。

21 ある意見に対する賛成率は約 60 % と予想されている。この意見に対する賛成率を信頼度 99 % で信頼区間の幅が 6 % 以下になるように推定したい。何人以上抽出して調べればよいか。

第 12 回統計の考え方解答

1 4 枚の硬貨を同時に投げて 2 枚が表で 2 枚が裏である確率は ${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ で与えられる。従って $P(X = x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{8}\right)^x \left(\frac{5}{8}\right)^{4-x}$, ($x = 0, 1, 2, 3, 4$) となり、二項分布 $B(4, \frac{3}{8})$ に従うことが分かる。平均値はゆえに $4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$ となる。

2 S_{10} の分布は二項分布 $B(10, 0.1)$ に従っている。よって、 $P(S_{10} = x) = {}_{10}C_x (0.1)^x (0.9)^{10-x}$ そこで、

$$(1) P(S_{10} = 8) = P(S_{10} = 8) = {}_{10}C_8 (0.1)^8 (0.9)^2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \times \frac{9^2}{10^{10}} = \frac{3465}{10^{10}}$$

$$(2) E_{10} = np = 10 \times 0.1 = 1$$

3 大小 2 個のサイコロを同時に投げて 2 個とも偶数の目が出る確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 従って確率変数 S は二項分布 $B(4, \frac{1}{4})$ に従います。ゆえにその期待値は $np = 4 \times \frac{1}{4} = 1$

4 確率分布表は

X	0	1	2	計
p_r	q^4	$2pq$	p^2	1

$B(2, p)$ の平均値は $2p$ なので、分散の定義から

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (0 - 2p)^2 q^4 + (1 - 2p)^2 2pq + (2 - 2p)^2 p^2 = 4p^2 q^4 + 2pq - 8p^2 q + 8p^3 q + 4p^2 - 8p^3 + 4p^4 \\ &= 2p(2pq^2 + q - 4pq + 4p^2 q + 2p - 4p^2 + 2p^3) \\ &= 2p\{2(1 - q)q^2 + q - 4(1 - q)q + 4(1 - q)^2 q + 2(1 - q) - 4(1 - q)^2 + 2(1 - q)^3\} \\ &= 2p(2q^2 - 2q^3 + q - 4q + 4q^2 + 4q - 8q^2 + 4q^3 + 2 - 2q - 4 + 8q - 4q^2 + 2 - 6q + 6q^2 - 2q^3) = 2pq \end{aligned}$$

と求められる。

5 $\sigma^2 = npq = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ 従って、 $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{30}}{4}$

6 A と B の出た目が一致する確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ となる。また、A の勝った回数を確率変数 X とすると $P(X = x) = {}_{90}C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{90-x}$ となる。つまり X は二項分布 $B(90, \frac{1}{6})$ に従う。ゆえに分散は $npq = 90 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{2}$

7 当たる確率は $\frac{3}{50}$ である。4 回引いたときに X 回当たる確率は ${}_4C_X \left(\frac{3}{50}\right) \left(\frac{47}{50}\right)$ である。よって X は二項分布 $B(4, \frac{3}{50})$ に従う。結局求める標準偏差は $\sigma = \sqrt{4 \times \frac{3}{50} \times \frac{47}{50}} = \frac{\sqrt{141}}{25}$

8 (1) 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。10 回振って k 回 1 の目が出る確率は ${}_{10}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$ となる。

(2) X は二項分布 $B(10, \frac{1}{6})$ に従う。よって X の期待値は $E(X) = np = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

(3) 分散は $\sigma^2 = npq = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$ である。また一方、分散を期待値で表す方法は $\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=0}^{10} k^2 P(x=k) - (E(X))^2$ である。従って、 $\sum_{k=0}^{10} k^2 P(x=k) = \sigma^2 + (E(X))^2 = \frac{25}{6} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$

9

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n (x-k)^2 P(k) = E\{(x-k)^2\} = E(x^2) - E(2xk) + E(k^2) = x^2 - 2xE(k) + E(k^2) \\ &= \{x - E(k)\}^2 + E(k^2) - (E(k))^2 \geq E(k^2) - (E(x))^2 \end{aligned}$$

実数の 2 乗の最小値は 0 であることを使った。ゆえに求める最小値は $E(k^2) - (E(x))^2 = \sigma - 2 = npq = np(1-q)$ となる。

10 サイコロを振ったとき、6 の目の出る確率 p は $p = \frac{1}{6}$ より、 $q = \frac{5}{6}$ となる。そこで、

$$(1) B\left(30, \frac{1}{6}\right) \quad (2) B\left(300, \frac{1}{6}\right) \quad (3) B\left(3000, \frac{1}{6}\right)$$

11 $n = 10, p = \frac{1}{5}$ であるので、 $E(X) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$

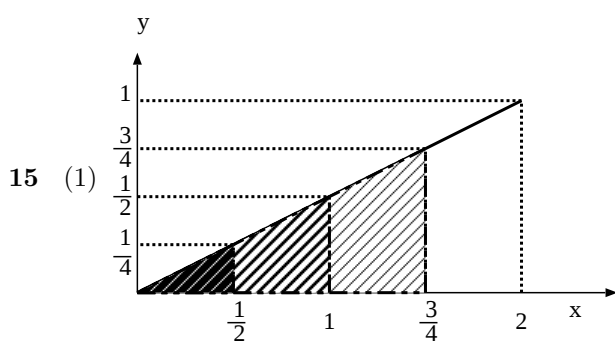
12 表が出る確率も裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ である。 X 回出る確率は ${}_{20}C_X \left(\frac{1}{2}\right)^X \left(\frac{1}{2}\right)^{20-X}$ すなわち二項分布に従うので、 $B(20, \frac{1}{2})$ となる。よって、 $E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

13 母集団分布表は以下のとおり。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

したがって $m = E(X) = \frac{11}{3}, \sigma = \frac{\sqrt{14}}{3}$

14 $E(X) = 4$ 小 |, $V(X) = \frac{4}{5}, \sigma(X) = \frac{2}{\sqrt{5}}$



i. $P(0 \leq X \leq 2) = 1$

ii. $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{4}$

iii.

$$\begin{aligned} &P(0.5 \leq X \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq X \leq 1.5) - P(0 \leq X \leq 0.5) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $0 \leq x \leq 3$ において、 $4-x > 0, f(x) = k(4-x) \geq 0$ であるから $k \geq 0$ また $P(0 \leq X \leq 3) = 1$ であるから $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4k - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k = 1 \quad k = \frac{2}{15}$

16 (1) $p_k = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$

(2) $E(X) = \frac{n+1}{3}, V(X) = \frac{1}{18}(n+1)(n-2)$

17 (1) $E(Y) = (a+b)p$

(2) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ のとき、 $V(Y)$ は最小になる。

18 (1) $\frac{nC_m}{2^{n+m}}$

(2) $E(Z) = 1$

19 6.0 g

20 $n = 100$ のとき、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(0, \frac{1}{100}\right)$ に従うから、 $\bar{Z} = \frac{\bar{X}}{\frac{1}{10}}$ とおくと Z は $N(0, 1)$ に従う。よって $P(|\bar{X}| \geq 0.1) = P(|Z| \geq 1) = 2p(1) = 0.6826$

$n = 400$ のとき、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(0, \frac{1}{400}\right)$ に従うから、 $\bar{Z} = \frac{\bar{X}}{\frac{1}{20}}$ とおくと Z は $N(0, 1)$ に従う。よって $P(|\bar{X}| \geq 0.1) = P(|Z| \geq 2) = 2p(2) = 0.9544$

$n = 900$ のとき、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(0, \frac{1}{900}\right)$ に従うから、 $\bar{Z} = \frac{\bar{X}}{\frac{1}{30}}$ とおくと Z は $N(0, 1)$ に従う。よって $P(|\bar{X}| \geq 0.1) = P(|Z| \geq 3) = 2p(3) = 0.9973$