第 11 回統計の考え方レポート

- 1 A, B 2 つの箱があり、A には赤球が 2 個、B には白球が 2 個入っている。今、両方の箱から同時に 1 個ずつ取りだして、取りだした球を入れ替えることにする。この試行を n 回くりかえしたときの A の中にある赤球の個数を確率変数 X_n とし、 X_n がそれぞれ 0, 1, 2 の値をとる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とする。

(1) p_n, q_n, r_n の値を求めよ。 (2) X_n の分散 $V(X_n)$ を求めよ。

- 2 サイコロを 5 回振って、偶数の目が出る回数を確率変数にとるとき、その確率分布を求めよ。

- 3 サイコロを 10 回振るとき、1 の目が何回出る場合がもっとも確からしいか。

- 4 1 回の試行で事象 A の起こる確率を p , 起こらない確率を $q (= 1 - p)$ とする。この事象 A の起こる回数を x とするとき、

(1) x の平均を求めよ。 (2) x の標準偏差を求めよ。

- 5 飛行機のエンジンが飛行中故障を起こす確率は q で、エンジンの少なくとも半数が動いていれば飛行を続けることができるものとする。また、1 つのエンジンの故障は他のエンジンに影響を与えないものとする。2 つのエンジンの飛行機の方が、4 つエンジンの飛行機より安全なのは q がどんな値のときか。

- 6 ある子ども 40 人の体重を測定して、右の度数分布表を得た。体重の平均値、中央値、最頻値を求めよ。

階級 (kg)	度数
20以上 ~ 25未満	2
25 ~ 30	5
30 ~ 35	11
35 ~ 40	14
40 ~ 45	5
45 ~ 50	3
計	40

7

葉の長さ (cm)	4.25	4.75	5.25	5.75	6.25	計
葉の数	16	51	83	161	97	408

左の度数分布表は、1 本の枝についている松葉の長さを測って得たものである。表から松葉の長さの標準偏差を求めよ。なお、表中の 4.25, 4.75, ..., 6.25 (cm) は階級値とする。

- 8 1 枚の硬貨を投げて、表が出たら得点を 1, 裏が出たら得点を 2 とする。これを 2 回繰り返したときの合計得点を X とする。 X の期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

- 9 白球を 3 個、赤球が 7 個入っている袋から 1 個を取りだして元に戻すことを 4 回くり返すとき、白球が出る回数を X とする。 X の平均値を求めよ。

- 10 1 と書いたカードを 1 枚、2 と書いたカード 2 枚、...、 n と書いたカード n 枚 がある。この中から 1 枚のカードを取りだすとき、カードの示す数 X を確率変数とする。

(1) $X = k$ である確率 p_k (2) X の平均値 m (3) X の標準偏差 σ

12 表は東京地方の大地震を示したものである。その平均の
間隔を求めよ。

11 次の度数分布表から最頻値 (モード) M_o を求めよ。

階級値 (x_i)	10	12	14	16	18	10	計
度数 (f_i)	4	5	7	3	2	1	22

13 あるクラス 40 人の生徒の体重を測って
次のような度数分布表を得た。これから体
重の平均値 $\bar{x}$ を小数第 1 位まで求めよ。

体重 [kg]	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
人数 [人]	1	0	2	5	7	10	8	4	1	2

14 得点 x_k を取った人数を f とすると、次の度数分布表
を得た。平均値を求めよ。

x_k	85	95	105	115	125	135	145	計
f	4	3	8	12	7	4	2	40

15 変量 1, 2, 3, 4, 5 の分散を求めよ。

16 資料 $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ の平均値が $\bar{x}=9$ で、平方和が 4900 のとき、分散を求めよ。分散の公式は

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}) f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n x_k^2 f_k - \bar{x}^2$$

で与えられる。ただし $N = \sum_{k=1}^n f_k$ とする。

17 右の度数分布表は高校 1 年男子 44 人の座高について調べた結果
である。これについて、分散と標準偏差を求めよ。

18 5 個の正数がある。おのおの 2 乗の和が 151 で、相異なる 2 つの
積の和が 237 である。この 5 個の正数の平均値と分散値を求めよ。

19 あることがらについて、 n 人中賛成者の割合が p で、残りは反対者
であるという。賛成者に 1, 反対者に 0 という値 X を与えるとき、

- (1) 変数 X の度数分布表を作成せよ。
- (2) 変数 X の平均値 m と、標準偏差 σ を求めよ。

座高 (cm)	人数 (人)
(以上)(未満)	
82.5 ~ 84.5	5
84.5 ~ 86.5	9
86.5 ~ 88.5	11
88.5 ~ 90.5	11
90.5 ~ 92.5	6
92.5 ~ 95.5	2

20 座標平面上の点 P の移動を大小 2 個のサイコロを同時に投げて求める。大きいサイコロの目が 1 または
2 のとき、P を x 軸の正の方向に 1 だけ動かし、その他の場合は x 軸の負の方向に 1 だけ動かす。更
に、小さいサイコロの目が 1 のとき、P を y 軸の正の方向に 1 だけ動かし、その他の場合は y 軸の負
の方向に 1 だけ動かす。最初、点 P が原点にあり、この試行を n 回繰り返した後の P の座標を (x_n, y_n)
とするとき

- (1) x_n の平均値と分散を求めよ。
- (2) x_n^2 の平均値を求めよ。
- (3) 原点を中心とし、点 (x_n, y_n) を通る円の面積 S の平均値を求めよ。ただし、 $(x_n, y_n) = (0, 0)$ のと
きは $S = 0$ とする。

第 10 回統計の考え方解答

1 (1) カードの総数は、 $1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$ であり、 k と書いたカードが k 枚あるため、 $p_k = \frac{k}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2k}{n(n+1)}$

(2) 平均値は期待値に等しい。 $1 \cdot \frac{2 \cdot 1}{n(n+1)} + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{n(n+1)} + \dots + n \cdot \frac{2 \cdot n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \sum_{i=1}^n i^2$
 $= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{2n+1}{3}$

(3) 標準偏差 σ に対して

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{2n+1}{3} \right)^2 p_k = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - 2 \frac{2n+1}{3} \cdot k + \frac{(2n+1)^2}{9} k \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2 \frac{2n+1}{3} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{9} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\ &= \frac{(n+2)(n-1)}{18} \end{aligned}$$

よって $\sigma = \frac{\sqrt{2(n+2)(n-1)}}{6}$

2 全部で 9 個のうち、5 個を取り出す場合の数は ${}_9C_5$ である。赤球の含まれない場合の数は 0 で、1 個含まれる場合の数は、残りの 4 球の組み合わせは 1 通り ($= {}_4C_4$) であるため、 ${}_4C_4 \cdot {}_5C_1 = 5$ 通り。2 個含まれるときは ${}_4C_3 \cdot {}_5C_2 = 40$ 通り。このように求めて、確率分布表は以下の通りとなる。

X	0	1	2	3	4	5	計
$p(X)$	0	$\frac{5}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

3 160 を仮平均にとって、 $(152.5 - 160) \times 3 + (157.5 - 160) \times 6 + (162.5 - 160) \times 32 + \dots = 330$ よって、 $160 + \frac{330}{70} = 164.7$

4 目の和とその確率を表にする。

目の和	場合とその確率			
2	1 と 1	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$		
3	1 と 2	$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}) \times 2$		
4	1 と 3	$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}) \times 2$	2 と 2	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
5	1 と 4	$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}) \times 2$	2 と 3	$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}) \times 2$
6	2 と 4	$(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}) \times 2$	3 と 3	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
7	3 と 4	$(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}) \times 2$		
8	4 と 4	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$		

ゆえに、求める平均値は $2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{2}{9} + 6 \times \frac{1}{12} + 7 \times \frac{1}{18} + 8 \times \frac{1}{36} = 4$

5 1 の目の出る回数の平均値は、 $10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

6 20 年後も夫も妻もともに死亡している確率は $(1 - 0.15) \times (1 - 0.2) = 0.68$ であるので、少なくとも一方が生きている確率は 0.32 である。ゆえに X の平均値は $10 \times 0.32 = 3.2$

7 1, 2, 3, ..., 20 から 2 つ選んで加えた数の期待値を求めればよい。まず 2 つ選ぶ選び方は ${}_{20}C_2 = 190$ 通りある。その和は 1 から 20 までの数がそれぞれ 19 回ずつ出現するものに等しい。 $1 + 2, 1 + 3, \dots, 1 + 20, 2 + 3, 2 + 4, \dots$ と実際に並べてみると分かる。求める数は $\frac{1}{190} \{(1 + 2 + \dots + 20) \times 19\} = 21$

8 期待値を $E(X)$ とすると、 $E(X) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)}{2}$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

より $V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left\{ \frac{(n+1)}{2} \right\}^2 = 10$ であるということだから、 $n^2 = 121$ を得る。これを満たす $n > 0$ なる n は $n = 11$

- 9 (1) A が勝って終了するのは、はじめの 3 回が A の 2 勝 1 敗となる時。その確率は $({}_3C_2 p^3 q) \cdot p = 3p^3 q$
同様に B が勝って終了する確率も $3pq^3$ である。4 セットで終了する確率は $3p^3 q + 3pq^3 = 3pq(p^2 + q^2)$
となる。

- (2) 3 勝すれば試合終了。 $X = 3, 4, 5$ の場合を取り得る。確率分布は以下のようになる。

X	3	4	5
$P(X)$	$p^3 + q^3$	$3pq(p^2 + q^2)$	$6p^2 q^2$

- (3) $p = q = \frac{1}{2}$ であるので、
X	3	4	5
$P(X)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
- したがって、 $E(X) = 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$

- 10 (1) Z と X, Y の値を表にすると以下の通り。

Z	0				1	2	4		
X	0	0	1	2	0	1	2	2	
Y	0	1	0	0	2	1	2	1	2

したがって、 Z の確率分布表は下のようになる。

Z	0	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

- (2) $E(Z) = 0 \times \frac{5}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = 1$, $E(Z^2) = 0^2 \times \frac{5}{9} + 1^2 \times \frac{1}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} = \frac{25}{9}$ とな
り、 $V(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2 = \frac{25}{9} - 1^2 = \frac{16}{9}$

11

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

12

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{70}$		1

$$P(X \geq 3) = \frac{3}{14}$$

- 13 $E(X) = \frac{5}{9}$, $V(X) = \frac{24}{25}$, $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

14

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{1}{40}$

$$P(0 \leq X \leq 2) = \frac{39}{40}$$

- 15 $E(X) = \frac{3}{5}$

- 16 $E(X) = \frac{19}{9}$

- 17 $E(X) = \frac{245}{18}$

- 18 (1) $\frac{8}{27}$

- (2) $\frac{49}{24}$

- 19 $E(X) = 3$, $V(X) = \frac{1}{2}$, $\sigma(X) = 1\sqrt{2}$

- 20 $E(X) = \frac{5}{8}$, $V(X) = \frac{6}{25}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{5}$

21

X	0	1	2	3	計
p_X	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	1