

## 第 13 回数学的思考方レポート

- 1 次の不定積分を求めよ。ただし (4) の  $x$  は  $t$  に無関係とする。

$$(1) \int (x^2 - 4x + 2)dx \quad (2) \int (2t - 1)(t + 3)dt$$

$$(3) \int (x - 1)^3 dx - \int (x + 1)^3 dx$$

$$(4) \int (t - x)(2t + x)dt$$

- 2 (1)  $f'(x) = 3x^2 - 2x$ ,  $f(2) = 0$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。  
 (2) 曲線  $y = f(x)$  が点  $(1, 0)$  を通り、更に点  $(x, f(x))$  における接線の傾きが  $x^2 - 1$  であるとき、 $f(x)$  を求めよ。

- 3 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^3 (x^2 - 2x - 1) \quad (2) \int_{-1}^2 (3t - 1)(t + 1)$$

$$(3) \int_1^4 (x + 1)^2 dx - \int_1^4 (x - 1)^2 dx$$

$$(4) \int_{-2}^0 (x^2 + 2x)dx - \int_2^0 (x^2 + 2x)dx$$

- 4 (1) 次の等式を証明せよ。

$$\text{i. } \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha^2)dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$$

$$\text{ii. } \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

- (2) 次の定積分を求めよ。

$$\text{i. } \int_2^3 (x - 2)(x - 3)dx$$

$$\text{ii. } \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (x^2 - 2x - 1)dx$$

- 5 (1)  $n$  を自然数とするととき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx, \quad \int_{-a}^a x^{2n-1} dx = 0$$

- (2) 定積分  $I = \int_{-2}^2 (3x - 1)(2x^2 + 1)$  を求めよ。

- 6 次の等式を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

$$(1) f(x) = 6x^2 - x + \int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$(2) f(x) = \int_0^1 xf(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt + 1$$

- 7 (1) 等式  $\int_a^x f(t)dt = x^2 - 3x - 4$  を満たす  $f(x)$  および定数  $a$  の値を求めよ。

$$(2) \text{関数 } f(x) = \int_{-2}^x (t^2 + t - 2)dt \text{ の極値を求めよ。}$$

- 8 次の曲線、直線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$$(1) y = x^2 - 3x - 4$$

$$(2) y = -x^2 + 2x \quad (x \leq 1), \quad x = -1, \quad x = 1$$

- 9 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

$$(1) y = x^2 - x - 1, \quad y = x + 2$$

$$(2) y = x^2 - 2x, \quad y = -x^2 + x + 2$$

- 10 (1)  $\int_1^4 |x - 2|dx$  を求めよ。

$$(2) \int_0^2 |x^2 + x - 2|dx \text{ を求めよ。}$$

- 11 放物線  $y = x^2 - 4x + 3$  を  $C$  とする。  
 $C$  上の点  $(0, 3)$ ,  $(6, 15)$  における接線をそれぞれ  $l_1, l_2$  とするとき、次のものを求めよ。

$$(1) l_1, l_2 \text{ の方程式}$$

$$(2) C, l_1, l_2 \text{ で囲まれる図形の面積}$$

- 12  $a$  を定数とする。放物線  $y = -x(x - 2)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積が、直線  $y = ax$  によって 2 等分されるとき  $a$  の値を求めよ。

- 13 点  $(1, 2)$  を通る直線と放物線  $y = x^2$  で囲まれる部分の面積を  $S$  とする。 $S$  の最小値を求めよ。

- 14  $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx|dx$  とするとき、 $f(t)$  の最小値と最大値を与える  $t$  の値を求めよ。

- 15  $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx|dx$  とするとき、 $f(t)$  の最小値と最小値を与える  $t$  の値を求めよ。

- 16  $a, b$  を定数とする。次の不等式を証明せよ。

$$17 \left\{ \int_0^1 (x + a)(x + b)dx \right\}^2 \geq \left\{ \int_0^1 (x + a)^2 dx \right\} \left\{ \int_0^1 (x + b)^2 dx \right\}$$

- (1) 曲線  $x = -y^2 + 2y - 2$ ,  $y$  軸、2 直線  $y = -1, y = 2$  で囲まれた図形の面積を求めよ。

- (2) 曲線  $x = y^2 - 3y$  と直線  $y = x$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ。

- 18 (1) 等式  $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$  がすべての実数  $x$  について成立するように、 $a, b, c$  の値を定めよ。

$$(2) \text{不定積分 } \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} dx \text{ を求めよ。}$$

- 19 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 x^3 dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x dx$$

$$(2) \int_2^4 \frac{1}{x} dx$$

$$(6) \int_0^3 5^x dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} dx$$

$$(7) \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})^2 dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x dx$$

$$(8) \int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+3)} dx$$

20 次の定積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{-2}^0 (2x+3)^3 dx & (8) & \int_{-1}^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\
 (2) & \int_1^3 (x-1)^2(x-3) dx & (9) & \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx \\
 (3) & \int_1^3 x\sqrt{3x-2} dx & (10) & \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{8-2x^2} dx \\
 (4) & \int_{-1}^{12} x\sqrt{3x-2} dx & (11) & \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx \\
 (5) & \int_{-1}^{12} \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx & (12) & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3} \\
 (6) & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x dx & (13) & \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3} dx \\
 (7) & \int_0^e \frac{(\log x)^3}{x} dx
 \end{aligned}$$

21 定積分  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx$  の値を求めよ。

22 次の定積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_0^2 x e^{-x} dx & (3) & \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx \\
 (2) & \int_1^e \frac{1}{x^2} \log x dx & (4) & \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx
 \end{aligned}$$

23 次の関数を  $x$  で微分せよ。

$$(1) f(x) = \int_0^x t \sin t dt \quad (2) f(x) = \int_0^x x \sin t dt$$

24 連続関数  $f(x)$  に対して  $F(x) = x - \int_0^x t f(x-t) dt$  とする。 $F''(x) = \cos x$  のとき、関数  $f(x)$  と  $F(x)$  を求めよ。

25 定積分を利用して、次の極限値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\
 (2) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}
 \end{aligned}$$

## 第 12 回数学的思考方解答

$$\begin{aligned}
 1 & (1) -2 \leq x \leq \frac{2}{3} \\
 & (2) x = -1 \text{ のとき最大値 } 3, \\
 & \quad x = -2 \text{ のとき最小値 } 6 \\
 2 & (a) a < 0, \frac{9 + \sqrt{33}}{6} \geq a \text{ のとき } M(a) = a^3 - 3a^2 + 4 \\
 & (b) 0 \leq a < 1 \text{ のとき, } M(a) = 4 \\
 & (c) 1 \leq a < \frac{9 + \sqrt{33}}{6} \text{ のとき, } M(a) = a^3 - 6a^2 + 9a
 \end{aligned}$$

$$3 -3 < a < 5 \quad 4 0 < a < 1$$

5  $x = 0$  で極小値 5,  
 $x = 1$  で極大値 10,  
 $x = 3$  で極小値 -22 を取る。

|         |     |    |     |    |     |    |   |
|---------|-----|----|-----|----|-----|----|---|
| $x$     | ... | 0  | ... | 1  | ... | 2  |   |
| $f'(x)$ | -   | 0  | +   | 0  | -   | 0  | + |
| $f(x)$  |     | 極小 |     | 極大 |     | 極小 |   |

$$\begin{aligned}
 6 & (1) x = 3 \text{ で最大値 } 27, x = 2 \text{ で最小値 } -32 \\
 & (2) a < -17 \text{ のとき } 2 \text{ 個, } a = -17 \text{ のとき } 3 \text{ 個,} \\
 & \quad -17 < a < 64 \text{ のとき } 4 \text{ 個, } a = 64 \text{ のとき } 2 \\
 & \quad \text{個, } < 64 < a \text{ のとき } 0 \text{ 個}
 \end{aligned}$$

$$7 a = -\frac{3}{4}, d = -1$$

$$8 (1) y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \quad (2) y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 9 & (1) y' = 4x - 1 \quad (3) y' = 3x^2 + 12x + 11 \\
 & (2) y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 & (2) y' = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2} \\
 (1) & y' = \frac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 & (1) y' = 12(3x+2)^2 \quad (3) y' = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} \\
 & (2) y' = -\frac{6}{(2x-1)^4} \quad (4) y' = -\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}
 \end{aligned}$$

$$12 (1) \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{9y} \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned}
 13 & (1) y' = -(2x+1) \sin(x^2+x+1) \\
 & (2) y' = 3 \sin^2 x \cos^3 x - 2 \sin^4 x \cos x \\
 & (3) y' = \frac{\sin x + 2 - \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x (\sin x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

$$(4) y' = \frac{1}{x \log 2} \quad (6) y' = \frac{1-2 \log x}{x^3}$$

$$(5) y' = \frac{6}{2x-1} \{\log(2x-1)\}^2$$

$$(7) y' = 2xe^{x^2} \quad (8) y' = -2 \cdot 3^{-2x+1} \log 3$$

$$(9) y' = -2e^{-x} \sin x \quad (10) y' = \frac{-2(2x^2+6x+3)}{(x+2)^3(x+3)^4}$$

$$(11) y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$$

$$14 (1) \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$15 (1) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin t} \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{1-t^2}{2t}$$

16 (1)  $f(x) = e^x$  とおき、平均値の定理を利用する。  
 $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = e^c$  をみたす  $c$   
が  $0 < c < x$  の範囲で存在する。 $0 < c < x$  より  
 $1 < e^c < e^x$  したがって、 $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$  が  
成り立つ。

(2) はさみうちの原理により  $1 < \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} < \lim_{x \rightarrow +0} e^x = 1$

よって  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

17

(1)

|      |          |            |          |            |          |            |          |
|------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| $x$  | $\cdots$ | -1         | $\cdots$ | 1          | $\cdots$ | 3          | $\cdots$ |
| $y'$ |          | +          | 0        | -          |          | -          | 0        |
| $y$  |          | $\nearrow$ | 0        | $\searrow$ |          | $\searrow$ | 8        |

極大値 0 ( $x = -1$ ),

極小値 8 ( $x = 3$ )

(2)

|      |   |            |                             |            |                             |            |        |
|------|---|------------|-----------------------------|------------|-----------------------------|------------|--------|
| $x$  | 0 | $\cdots$   | $\frac{2}{3}\pi$            | $\cdots$   | $\frac{4}{3}\pi$            | $\cdots$   | $2\pi$ |
| $y'$ |   | +          | 0                           | -          | 0                           | +          |        |
| $y$  | 0 | $\nearrow$ | $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ | $\searrow$ | $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $2\pi$ |

極大値  $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$  ( $x = \frac{2}{3}\pi$ ),

極小値  $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$  ( $x = \frac{4}{3}\pi$ ),

(3)

|      |   |            |                 |            |                 |            |                  |            |                  |            |        |
|------|---|------------|-----------------|------------|-----------------|------------|------------------|------------|------------------|------------|--------|
| $x$  | 0 | $\cdots$   | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$   | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$   | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$   | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$   | $2\pi$ |
| $y'$ |   | +          | 0               | -          | 0               | +          | 0                | -          | 0                | (3)        | i.     |
| $y$  | 1 | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$   | $\searrow$ | 1               | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$    | $\searrow$ | -3               | $\nearrow$ |        |

極大値  $\frac{3}{2}$  ( $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ ),

極小値 1, ( $x = \frac{\pi}{2}$ ), -3 ( $x = \frac{3}{2}\pi$ )

(4)

|      |          |            |          |            |           |
|------|----------|------------|----------|------------|-----------|
| $x$  | $\cdots$ | 0          | $\cdots$ | 2          | $\cdots$  |
| $y'$ |          | -          | 0        | +          | 0         |
| $y$  |          | $\nearrow$ | 0        | $\searrow$ | $4e^{-2}$ |

極大値  $4e^{-2}$  ( $x = 2$ ),

極小値 0 ( $x = 0$ )

(5)

|      |   |            |            |            |
|------|---|------------|------------|------------|
| $x$  | 0 | $\cdots$   | $\sqrt{e}$ | $\cdots$   |
| $y'$ |   | +          | 0          | -          |
| $y$  |   | $\nearrow$ | $12e$      | $\searrow$ |

極大値  $\frac{1}{2e}$  ( $x = \sqrt{e}$ ), 極小値 なし

18  $a < -1, \quad 3 < a$

19

(1)

|         |   |                       |                 |          |                  |                        |            |
|---------|---|-----------------------|-----------------|----------|------------------|------------------------|------------|
| $x$     | 0 | $\cdots$              | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\cdots$               | $2\pi$     |
| $f'(x)$ |   | +                     | 0               | -        | 0                | +                      |            |
| $f(x)$  | 0 | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$      | 0        | $\nearrow$       | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ |

20

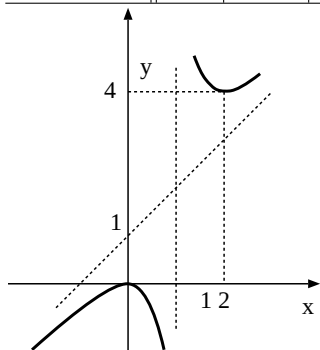
(1)

|         |           |            |   |           |          |            |   |            |
|---------|-----------|------------|---|-----------|----------|------------|---|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $\cdots$   | 0 | $\cdots$  | 1        | $\cdots$   | 2 | $\cdots$   |
| $f'(x)$ |           | +          | 0 | -         |          | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\infty$  | $\nearrow$ | 0 | $-\infty$ | $\infty$ | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ |

漸近線は  $y = x + 1$

ii.

|         |                     |   |                     |          |
|---------|---------------------|---|---------------------|----------|
| $x$     | $\cdots$            |   | 1                   | $\cdots$ |
| $f'(x)$ |                     | - |                     | +        |
| $f(x)$  | $\nearrow \searrow$ |   | $\searrow \nearrow$ |          |

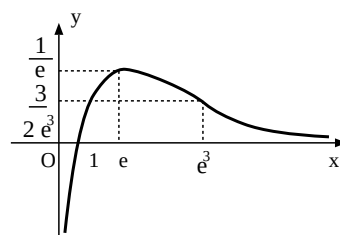


(2)

|         |           |            |                    |          |          |
|---------|-----------|------------|--------------------|----------|----------|
| $x$     | 0         | $\cdots$   | $e$                | $\cdots$ | $\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +          | 0                  | -        |          |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ , 極大 |          |          |

|                   |          |                     |                         |
|-------------------|----------|---------------------|-------------------------|
| $x$               |          |                     |                         |
| 極大値 $\frac{1}{e}$ | $f''(x)$ | -                   | 0                       |
|                   | $f(x)$   | $\nearrow \searrow$ | $\frac{3}{2\sqrt{e^3}}$ |

変曲点  $(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$



i.

|         |   |            |                                            |            |                                            |
|---------|---|------------|--------------------------------------------|------------|--------------------------------------------|
| $x$     | 0 | $\cdots$   | $\pi$                                      | $\cdots$   | $2\pi$                                     |
| $f'(x)$ |   | -          | 0                                          | +          | 0                                          |
| $f(x)$  | 1 | $\searrow$ | $(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi})$ | $\nearrow$ | $(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi})$ |

極大値  $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7}{4}\pi}$  ( $x = \frac{7}{4}\pi$ )

極小値  $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$  ( $x = \frac{3}{4}\pi$ )

ii.

|          |   |                     |                   |                     |             |
|----------|---|---------------------|-------------------|---------------------|-------------|
| $x$      | 0 | $\cdots$            | $\pi$             | $\cdots$            | $2\pi$      |
| $f''(x)$ |   | +                   | 0                 | -                   |             |
| $f(x)$   | 1 | $\nearrow \searrow$ | $-e^{-\pi}$ , 変曲点 | $\searrow \nearrow$ | $e^{-2\pi}$ |

変曲点  $(\pi, -e^{-\pi})$

21

- 3 個
- 3 個 ( $k > \frac{e^2}{4}$  のとき)
- 2 個 ( $k = \frac{e^2}{4}$  のとき)
- 1 個 ( $0 < k < \frac{e^2}{4}$  のとき)
- 0 個 ( $k \geq 0$  のとき)

22

(1)  $f(x) = e^x - (1+x)$  とおく。  $f'(x) = e^x - 1$ 。  
  $x > 0$  より  $f'(x) > 0$  だから、  $f(x)$  は常に増加する。  
  $f(0) = 0$  だから、  $x > 0$  で  $f(x) > 0$ 、したがって  $e^x > 1+x$

(2)  $g(x) = e^x - (1+x+\frac{x^2}{2})$  とおく。  $g'(x) = e^x - (1+x)$ 。  
 (1) の結果より、  $g'(x) > 0$  だから、  $g(x)$  は常に増加する。  
  $g(0) = 0$  だから、  $x > 0$  で  $g(x) > 0$ 。したがって  $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$

23

$(-3 \sin t \cos^2 t, 3 \sin^2 t \cos t)$ ,  $|\mathbf{v}| = 3|\sin t \cos t|$ ,  
  $\alpha = (6 \cos t - 9 \cos^3 t, 6 \sin t - 9 \sin^3 t)$ ,  $|\alpha| = 3\sqrt{1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t}$

24

- (1)  $(1+x) \sim 4x+1$
- (2)  $\frac{1}{(1+x)^2} \sim -2x+1$
- (3)  $\tan x \sim x$

25

$a = \sqrt{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{3}{4}\pi + 1 \right)$