

第 10 回数学的思考方レポート

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ を使用せよ。

1 (1) 次の対数の値を求めよ。

- i. $\log_3 81$
- ii. $\log_{10} \frac{1}{1000}$
- iii. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243}$

(2) 次の式を簡単にせよ。

- i. $\log_2 \frac{4}{5} + 2\log_2 \sqrt{10}$
- ii. $\log_3 \sqrt{12} + \log_3 \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \log_3 {}^3\sqrt{3}$

2 次の式を簡単にせよ。

- (1) $\left(\log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \log_3 63\right) \log_{14} 3$
- (2) $(\log_3 25 + \log_9 5)(\log_5 9 + \log_{25} 3)$

3 (1) $\log_2 a = \alpha$, $\log_3 5 = b$ のとき、 $\log_2 10$ と $\log_{15} 40$ を a, b で表せ。

(2) $\log_x a = \frac{1}{3}$, $\log_x b = \frac{1}{8}$, $\log_x c = \frac{1}{24}$ のとき、 $\log_{abc} x$ の値を求めよ。

(3) a, b, c を 1 でない正の数とし、 $\log_a b = \alpha$, $\log_b c = \beta$, $\log_c a = \gamma$ とする。このとき、 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ が成り立つことを証明せよ。

4 (1) $9^{\log_3 5}$ の値を求めよ。

(2) $2^x = 3^y = 6^z$ ($xyz \neq 0$) のとき、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ の値を求めよ。

5 次の関数のグラフをかけ。また、関数 $y = \log_4 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

- (1) $y = \log_4(x+1)$
- (2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$
- (3) $y = \log_4(4x-8)$

6 次の各組の数の大小を比較せよ。

- (1) $1.5, \log_3 5$
- (2) $2, \log_4 9, \log_2 5$
- (3) $\log_{0.5} 3, \log_{0.5} 2, \log_3 2, \log_5 2$

7 次の方程式を解け。

- (1) $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$
- (2) $\log_2(x+2) = \log_4(5x+16)$
- (3) $\log_2 x + 6\log_x 2 = 5$

8 次の不等式を解け。

- (1) $\log_{0.3}(2-x) \geq \log_{0.3}(3x+14)$

$$(2) \log_2(x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$$

$$(3) (\log_2 x)^2 - \log_2 4x > 0$$

9 $1 \leq x \leq 8$ のとき、関数 $y = (\log_2 x)^2 + 8\log_{\frac{1}{4}} 2x + \log_2 32$ の最大値と最小値を求めよ。

10 $x \geq 2, y \geq 2, xy = 16$ のとき、 $(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

11 (1) $\log_{10} 5, \log_{10} 0.006, \log_{10} \sqrt{72}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 6^{50} は何桁の整数か。

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ を小数で表すと、小数第何位に初めて 0 でない数字が表れるか。

12 ある国の銀行に、年利 (複利) 5% の固定利率で 100 万円を預金した。 n 年後の預金は、いくらになるか。また、預金が 150 万円以上になるのは何年後か。

13 不等式 $2 + \log_{\sqrt{y}} 3 < \log_y 81 + 2\log_y \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ の表す領域を図示せよ。

14 $8^{n-1} < 10^{30} \leq 8^n$ となる自然数 n はいくつか。このとき 8^n の一の位の数字と最高位の数字を求めよ。

15 $y = \log_3 x$ のグラフをもとにして、次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y = \log_3(-x) + 1$$

$$(2) y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

16 次の 3 数の大小関係を調べよ。 $\log_2 6, \log_4 26, \log_8 125$

17 次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = \log_2(x-1) + \log_2(3-x)$ の最大値を求めよ。

(2) $1 \leq x \leq 27$ のとき、 $z = (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 7$ の最大値、最小値を求めよ。

18 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) (\log_3 x)^2 = \log_9 x^2$$

$$(2) (\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 - 3 \geq 0$$

19 (1) 6^{20} は何桁の被か。

(2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{20} = x$ を小数で表したとき、小数第何位にはじめて 0 でない数が現れるか。

20 不等式 $0.9^n > 0.0001$ をみたす最大の整数 n を求めよ。

第 9 回数学的思考方解答

- 1

(1) 256 (3) a^4b (5) $\sqrt{5}$ (7) a
(2) a^2 (4) 9 (6) 0
- 2

(1) i. $a^2 - b$ (2) $4\sqrt{7}$
ii. $a - b^{-1}$
- 3

(1) $8^{\frac{1}{8}} < 2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}}$ (3) ${}^6\sqrt{6} < \sqrt{2} < {}^3\sqrt{3}$
(2) ${}^4\sqrt{\frac{1}{125}} < {}^3\sqrt{\frac{1}{25}} < \frac{1}{\sqrt{5}}$
- 4

(1) $x = 1$ (3) $x = \frac{1}{2}, y = 2$
(2) $x = 3$
- 5

(1) $x > 6$ (3) $x \geq 1$
(2) $-1 < x < 3$
- 6

(1) $x = \frac{3}{2}$ (5) $x < -\frac{3}{2}$
(2) $x = -\frac{3}{2}$ (6) $x \geq -1$
(3) $x = 2$
(4) $x = 0, 3$ (7) $x \geq \frac{3}{2}$
- 7

(1) $x = 2$ のとき最大値 (2) $x = 0$ のとき最大値
50, $x = -1$ のとき 8
最小値 1
- 8

(1) $y = 3^{x-1}$ (2) $y = 3^{-x-1}$

欄外
- 9

(1) $y = 3^{x-2}$ x 軸方向に 2 だけ平行移動する。
(2) $y = -\frac{1}{3^x}$ 原点に関して対称移動する。
(3) $y = \frac{3^x}{3} + 2$ x 軸方向に 1、 y 軸方向に 2 だけ平行移動する。
- 10

$a^b < b^a < b^{-a} < a^{-b}$
- 11

(1) $\begin{cases} x = -2 \text{ のとき最大値 } 5 \\ x = 1 \text{ のとき最小値 } \frac{9}{19} \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x = 5 \text{ のとき最大値 } 901 \\ x = 1 \text{ のとき最小値 } 1 \end{cases}$
- 12

$\frac{21}{5}$
- 13

2
- 14

$x = 1$ のとき最小値 4
- 15

(1) 10, 7
(2) $X^2 + Y^2 = 4, 0 < X < 2$
(3) $X = \frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{73}{8}$, このとき $x = 1 - 2\log_3 2$
- 16

(1) $4^{-1} = \frac{1}{4}$ 。 $f(1) = \frac{7}{4}$
(2) 相加相乗平均を使って $2^x + 2^{-x} = 2$ 、等号が成り立つのは $x = 0$
 $x = -1$ のとき、最小値 4 を取る。
- 17
- 18

(1) $a^{\frac{1}{x}} = 2, a^{\frac{1}{y}} = 6$
(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_a 6$
(3) $\frac{1}{z} = \log_a 6$ であることを示せばよい。
- 19

(1) $a^x + a^{-x} = 7, a^{\frac{3}{2}x} + a^{-\frac{3}{2}x} = 18$
(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4, \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -8$
- 20

(1) $1 < x < 3$
(2) $x = 1$ のとき、最小値 72。 $x = 3$ のとき、最大値 648

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
(1) y	0.04	0.06	0.11	0.19	0.33	0.58	1	1.73	3
(2) y	3	1.73	1	0.58	0.33	0.19	0.11	0.06	0.04