第 4 回数学的考え方レポート

1 関数 $y = \dfrac{-2x+1}{2x-4}$ のグラフをかけ。

2 関数 $y = \dfrac{3x-1}{x-1}$ について次の問に答えよ。

(1) グラフをかけ。また漸近線の方程式を求めよ。

(2) 定義域を $x \geq 0,\ 2 \geq x$ とするとき、値域を求めよ。

(3) 値域が $y \geq 2\,(y \neq 3)$ となるとき、定義域を求めよ。

3 関数 $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に 1 だけ平行移動したものをグラフとする関数の式を求めよ。

4 関数 $y = \dfrac{-x+3}{2x-1}$ のグラフと直線 $y = x+1$ との交点の座標を求めよ。

5 関数

$$y = \frac{2x}{x-1} \tag{1}$$

について、次の問に答えよ。

(a) $\dfrac{2x}{x-1} \geq x+2$ を満たす x の範囲を、(1) のグラフを利用して解け。

(b) 関数 (1) のグラフが $y = kx + 2(k \neq 0)$ と共有点をもつとき、k の値の範囲を求めよ。

6 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \sqrt{-2x+6}$ (2) $y = -\sqrt{x+2}$

7 $y = \sqrt{x-2}$ のグラフと $y = 4-x$ との交点の座標を求めよ。

8 2 つの関数 $y = \sqrt{2x+5}$ と $y = x+1$ のグラフを利用して、方程式 $\sqrt{2x+5} = x+1$ と不等式 $\sqrt{2x+5} > x+1$ を解け。

9 $y = \sqrt{-3x+6}$ と直線 $y = -x+k$ との共有点の個数を調べよ。

10 次の数列の収束、発散を調べよ。

(1) $\left\{2+\dfrac{1}{n}\right\}$ (2) $\{3-n^2\}$ (3) n^3-1

11 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-n)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+n-1}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}+3}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n+2}-n$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2^n}{5^n-3^n}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{3^n+(-2)^n\}$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-1}{3^n+2}$

12 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-r^{n+1}+1}{r^{n+1}+1}\,(r \neq -1)$ の極限を調べよ。

13 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}3^x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}cos\frac{1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{3}{x+3}\right)$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+6}+x}{x+2}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}+x)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{x-1}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$

14 次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。
$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2} = 1$

15 次の 2 式を満たすような整式 $f(x)$ を求めよ。
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-4} = 3,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-4} = 2$

16 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{1}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

17 次の関数の $x = 2$ における連続性を調べよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{|x-2|} & (x \neq 2) \\ 4 & (x = 2) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-4|}{|x-2|} & (x \neq 2) \\ 4 & (x = 2) \end{cases}$

18 次の方程式は定義域に少なくとも 1 つの実数解を持つことを示せ。

(1) $x^3-2x^2+x-1 = 0 \quad (1 < x < 2)$

(2) $x\cos x+\sin x+1 \quad (0 < x < \pi)$

19 a を定数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{ax+2x^n+x^{n+1}}{1+x^n+x^{n+1}} \quad (x > 0)$ で定義される関数について次の問に答えよ。

(1) (i) $x > 1$, (ii) $0 < x < 1$ のそれぞれの場合について関数を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 0$ で連続であるように、定数 a の値を求めよ。

20 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}x\left(\frac{2}{x+2}\right)^{n-1} \tag{2}$$

(a) 無限級数 (2) が収束する x の範囲を求めよ。

(b) 無限級数 (2) が収束するとき、その和を $f(x)$ とする。

i. 関数 $f(x)$ のグラフをかけ。

ii. 関数 $f(x)$ の連続性を調べよ。

第 3 回数学的考え方解答

1 (1) $a_n = -3n + 103$ (2) $a_n = \frac{1}{4n+1}$ (3) $a_n = 2n - 48$, 第 25 項。

2 (1) 初項 $a_1 = p + q$, 公差 p

(2) 初項 $c_1 = 3p + q$, 公差 $3p$

3 3 数を $a-d, a, a+d$ と表すと、$3a = 27$, $a(a^2-d^2) = 693$。これを解いて 7, 9, 11

4 (1) $S = \dfrac{1}{2}n(3n-1)$ (2) $S = -4750$ (3) $S = S_{50} - S_{19} = 5332$

5 (1) $a = \dfrac{2}{9}, b = \dfrac{2}{4}, c = 6$

(2) $a = \sqrt{3}, d = \sqrt{3}$

6 (1) i. $a \neq \dfrac{1}{3}$ のとき、$S_n = \dfrac{a\{1-(3a)^n\}}{1-3a}$

ii. $a = \dfrac{1}{3}$ のとき、$S_n = \dfrac{n}{3}$

(2) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

7 (1) $T = \dfrac{S}{(1+r)^n}$

(2) $S_n = \dfrac{P(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$

8 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(4k^2-2k+1) = n(2n^3+4n^2+2n+1)$

(2) $\dfrac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

9 (1) $S_n = \frac{1}{2}n^2(n+1)$ (2) $S_n = 2^{n+1} - n - 2$

10 (1) $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}2\right) = n(n+1)$

(2) $S = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

11 (1) $\dfrac{n}{2n+1}$ (2) $(n-1)\cdot 3^n + 1$

12 $a_n = 3n^2 - 4n + 3$ **13** $a_n = n(n+1)(n+2)$

14 (1) $a_n = 4n - 3$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n(4n-3)$

15 (1) $n \geq 2$ のとき、第 $n-1$ 群までにある奇数の個数は $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ よって第 n 群の最初の奇数は $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目の奇数で、$2\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\}-1 = n^2-n+1$。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2) 第 n 群は、初項 n^2-n+1, 公差 2, 項数 n の等差数列をなすから、その総和は $\dfrac{1}{2}\{2\cdot(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\} = n^3$

(3) 301 が第 n 群の m 番目の奇数であるとすると $n^2-n+1 \leq 301 < (n+1)^2-(n+1)+1$ よって $n(n-1) \leq 300 < (n+1)n$ これを満たす n は $n = 17$, ゆえに $(17^2-17+1)+(m-1)\cdot 2 = 301$ を解いて、$m = 15$ したがって、第 17 群の 15 番目に列ぶ数である。

16 (1) 分母が n である分数は n 個あるから、分母が 9 である分数のうちで最後の数はもとの数列の $1+2+\cdots+9 = 45$ (番目) ゆえに求める分子は 46

(2) 1445

17 (1) $a_n = 4n - 7$ (2) $a_n = 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (3) $a_n = 2^n - \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 2$

18 (1) $a_n = 3\cdot 2^{n-1} + 3$ (2) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}$

19

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+n(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5) \quad (3)$$

(a) $n = 1$ のとき $(lhs) = 1\cdot 3$, $(rhs) = \frac{1}{6}(1+1)\cdot(4+5) = 3$ したがって、(3) は成り立つ。

(b) $n = k$ のとき、(3) が成り立つと仮定すると、

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+k(2k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) \quad (4)$$

(c) $n = k+1$ のとき、(4) より、

$$\begin{aligned} & 1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+k(2k+1)+(k+1)\{2(k+1)+1\} \\ = & \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)\{2(k+1)+1\} \\ = & \frac{1}{6}(k+1)(k+2)\{4(k+1)+5\} \end{aligned}$$

したがって、$n = k+1$ のときにも (3) が成り立つ。(a), (b), (c) よりすべての自然数について (3) が成り立つ。

20 (1) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{5}{6}, a_3 = \frac{23}{24}, a_4 = \frac{119}{120}$

(2) (1) より

$$a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)} \quad (5)$$

と推測できる。

i. $n = 1$ のとき、(1) から (5) は成り立つ。

ii. $n = k$ のとき (5) が成り立つと仮定すると

$$a_k = 1 - \frac{1}{(k+1)} \quad (6)$$

iii. $n = k+1$ のときを考えると、(6) より

$$a_{k+1} = a_k + \frac{k+1}{(k+2)} = 1 - \frac{1}{\{(k+1)+1\}}$$

したがって $k = n+1$ のときにも (5) が成り立つ。

よって (i) ∼ (iii) より、すべての自然数 n について (5) が成り立つ。