第 2 回数学的考え方レポート

1 集合 $U = \{x|x$ は 1 桁の自然数 $\}$

(1) 集合 U 部分集合 A, B を $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 6, 9\}$ とするとき、次の集合を求めよ。

i. $\bar{A}$　　ii. $\bar{A} \cap B$　　iii. $\bar{A} \cap \bar{B}$　　iv. $\bar{A} \cup \bar{B}$

(2) 集合 U の部分集合 A, B において $\bar{A} \cap B = \{3, 9\}$, $A \cap \bar{B} = \{2, 4, 8\}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 5, 7\}$ が成り立つとき、集合 A, B を求めよ。

2 (1) de Morgan の法則 $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$ を証明せよ。

(2) 1 以上 100 以下の整数全体の集合 U を全体集合として考える。$A = \{x|x$ はある整数の平方$, x \in U\}$, $B = \{x|x$ は偶数$, x \in U\}$, $C = \{x|x$ は 4 の倍数$, x \in U\}$ とするとき、$\bar{C} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ であることを示せ。

3 $A = \{n|n$ は 16 の正の約数 $\}$, $B = \{n|n$ は 20 の正の約数 $\}$, $C = \{n|n$ は 8 以下の正の偶数 $\}$ とする。このとき、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B \cap C$　　(2) $A \cup B \cup C$　　(3) $(A \cap B) \cup C$　　(4) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

4 100 から 200 までの整数のうち、次の整数の個数を求めよ。

(1) 5 かつ 8 の倍数

(2) 5 または 8 の倍数

(3) 5 でも 8 でも割り切れない整数

(4) 5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数

5 100 人の学生について、数学が好きか好きでないか、および、得意か得意でないかについて調査した。好きと答えた者は 43 人、得意と答えた者は 29 人、好きでもなく得意でもないと答えた者は 35 人であった。このとき、数学が好きまたは得意でもあると答えた者は [(a)] 人、数学が好きであり得意でもあると答えた者は [(b)] 人である。また数学は好きだが得意ではないと答えた者は [(c)] 人である。

6 集合 U とその部分集合 A, B に対して、$n(U) = 100$, $n(A) = 60$, $n(B) = 48$ とする。このとき、[(a)] $\leq n(A \cap B) \leq$ [(b)] であるから、[(c)] $\leq n(\bar{A} \cup B) \leq$ [(d)] である。

7 100 人のうち、A 市に行ったことのある人は 50 名、B 市に行ったことのある人は 13 名、C 市に行ったことのある人は 30 名であった。A 市と B 市に行ったことのある人は x 名、A 市と C 市に行ったことのある人は 9 名、B 市と C 市に行ったことのある人は 10 名であった。A 市と B 市と C 市に行ったことのある人は 3 名、A 市にも B 市にも C 市にも行ったことのない人は 28 名であった。このとき、x の値を求めよ。

8 x, y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

(1) $x = 0$ ならば $xy = 0$

(2) $x^2 = 9$ ならば $x = 3$

(3) $x \neq 1$ ならば $x \geq 2$

(4) $x + y > 0$, $xy > 0$ ならば $x > 0$, $y > 0$

(5) $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = y = 0$

9 (1) x は実数とする。集合を利用して次の命題の真偽を調べよ。

i. $0 \leq x \leq 1$ ならば $|x| < 1$

ii. $|x - 1| < 2$ ならば $|x| < 3$

(2) 文字は全て実数とする。次の条件の否定を調べよ。

i. $x > 0$ かつ $y \geq 0$

ii. $x \geq 2$ または $x < -3$

iii. $a = b = c = 0$

10 (1) ～ (3) の文について、[　　] にあてはまるものを、次の (a) ～ (d) から選べ。

(a) 必要条件であるが十分でない。
(b) 十分条件であるが必要条件でない。
(c) 必要十分条件である。
(d) 必要条件でも十分条件でもない。

(1) 実数 x, y, z に対し $x+2y+z^2=0$ は $x=y=z=0$ であるための [　　]
(2) 整数 n について、$\sqrt{n}$ が無理数であることは、n が奇数であるための [　　]
(3) a, b は実数とする。$b<0$ であることは、2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつための [　　]

11 次の命題と否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1) すべての実数 x について $x^2>0$
(2) ある素数は偶数である。
(3) 任意の実数 x, y に対して $x^2-4xy+4y^2>0$
(4) $x^2-3x-10=0$ である自然数 x が存在する。

12 (1) 実数 a, b について、次の命題の逆・裏・対偶を述べ、その真偽をいえ。$a+b>0$ ならば「$a>0$ かつ $b>0$」
(2) 整数 n の平方が 3 の倍数ならば n は 3 の倍数であることを証明せよ。

13 $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ。ただし、$\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ はともに無理数であることは知られているものとする。

14 $\sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ。ただし、n を自然数とするとき、n^2 が n 倍数ならば n は 7 の倍数であることを用いてよいものとする。

15 (1) a, b が有理数のとき、$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。ただし、$\sqrt{2}$ は無理数である。
(2) 等式 $(2+3\sqrt{2})x+(1-5\sqrt{2})y=13$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

16 a, b, c は整数とし、$a^2+b^2=c^2$ とする。a, b のうち、少なくとも 1 つは 3 の倍数であることを証明せよ。

17 (1) 次の (i), (ii) を証明せよ。
i. 連続した 2 つの整数の積は 2 の倍数である。
ii. 連続した 3 つの整数の積は 6 の倍数である。
(2) 整数 n に対して、$2n^3+2n^2+n$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

18 次の条件が成り立つための定数 a, b, c の必要十分条件を求めよ。すべての整数 x について ax^2+bx+c の値が偶数になる。

19 n, r は整数で、$0 \leq r \leq 4$ とするとき、n^5 を 5 で割った余りが r ならば n を 5 で割った余りでも r であることを示せ。ただし二項定理 $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ を利用せよ。

20 n を 2 以上の整数、a, b を 0 以上の整数とする。

(1) n が 2 より大きい素数のとき、$a^2-b^2=n$ を満たす a, b を n で表せ。
(2) n が奇数であり、かつ素数でないならば、$a^2-b^2=n$ を満たす a, b が存在することを示せ。

第 1 回数学的考え方解答

1 南東
2 179 人
3 60 人
4 28 通り
5 $\frac{16}{55}$
6 $\frac{4}{9}$
7 58.9 ～ 78.3 点
8 220 万円
9 点 ハ
10 (b), (c), (e)
11 (c)
12 280 人
13 イ と ウ
14 $(18\pi-36)\mathrm{cm}^2$
15 イ