第 13 回統計の考え方レポート

1 二項分布 $B(3, p)$ について、分散を求めよ。

2 二項分布 $B(20, \frac{1}{5})$ の分散 σ^2 と標準偏差 σ を求めよ。

3 100 本のくじの中に 5 本の当たりくじがある。10 回引いたとき当たる回数を X とする。X の標準偏差を求めよ。ただし、引いたくじはもとに戻すものとする。

4 確率変数 X は平均 10, 標準偏差 2 の正規分布に従うとき、X の確率密度関数を書け。

5 確率密度関数が $f(x) = \sqrt{1}2\sqrt{\pi}e^{-\frac{(x-5)^2}{4}}$ で与えられる正規分布を標準化せよ。

6 クラスの者の英語と数学の成績を調べたら次の表のようになった。K 君の成績は英語 76 点、数学 70 点であった。クラスの中の成績順位からいうと、K 君は英語と数学とではどちらが上位にあると考えられるか。

	英語	数学
平均点	69 点	56 点
標準偏差	8.2 点	12.4 点

7 平均が 5, 分散が 2 の確率分布で、変数区間が (3, 7) に属する確率は $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ。

8 確率変数 X が平均 50, 標準偏差 14 であるとき、確率 $P(22 \leq X \leq 78)$ の範囲を求めよ。

9 受講者 288 人の公益概論の試験を行ったところ、平均点は 62 点で、標準偏差は 6 点であった。Chebyshef の不等式を用いて、50 点以上で 74 点以下の生徒数は何人より多いと言えるか。

10 確率変数 X が平均 80, 標準偏差 10 の正規分布に従うとき、確率変数 X^2 の平均 $E(X^2)$ を求めよ。

11 確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ も正規分布に従うことが分かっている。このとき、Z の分布が $N(0, 1)$ となることを示せ。

第 12 回統計の考え方解答

1 4 枚の硬貨を同時に投げて 2 枚が表で 2 枚が裏である確率は ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ で与えられる。従って $P(X=x) = {}_4C_x\left(\frac{3}{8}\right)^x\left(\frac{5}{8}\right)^{4-x}, \quad (x=0,1,2,3,4)$ となり、二項分布 $B(4,\frac{3}{8})$ に従うことが分かる。平均値はゆえに $4\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$ となる。

2 S_{10} の分布は二項分布 $B(10,0.1)$ に従っている。よって、$P(S_{10}=x) = {}_{10}C_x(0.1)^x(0.9)^{10-x}$ そこで、

(1) $P(S_{10}=8) = P(S_{10}=8) = {}_{10}C_8(0.1)^8(0.9)^2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\times\frac{9^2}{10^{10}} = \frac{3465}{10^{10}}$

(2) $E_{10} = np = 10\times 0.1 = 1$

3 大小 2 個のサイコロを同時に投げて 2 個とも偶数の目の出る確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 従って確率変数 S は二項分布 $B(4,\frac{1}{4})$ に従います。ゆえにその期待値は $np = 4\times\frac{1}{4} = 1$

4 確率分布表は

X	0	1	2	計
p_r	q^2	$2pq$	p^2	1

$B(2,p)$ の平均値は $2p$ なので、分散の定義から

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= (0-2p)^2q^2+(1-2p)^2 2pq+(2-2p)^2p^2 = 4p^2q^2+2pq-8p^2q+8p^3q+4p^2-8p^3+4p^4\\
&= 2p(2pq^2+q-4pq+4p^2q+2p-4p^2+2p^3)\\
&= 2p\{2(1-q)q^2+q-4(1-q)q+4(1-q)^2q+2(1-q)-4(1-q)^2+2(1-q)^3\}\\
&= 2p(2q^2-2q^3+q-4q+4q^2+4q-8q^2+4q^3+2-2q-4+8q-4q^2+2-6q+6q^2-2q^3) = 2pq
\end{aligned}$$

と求められる。

5 $\sigma^2 = npq = 10\cdot\frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ 従って、$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{30}}{4}$

6 A と B の出た目が一致する確率は $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ となる。また、A の勝った回数を確率変数 X とすると $P(X=x) = {}_{90}C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\frac{5}{6}^{90-x}$ となる。つまり X は二項分布 $B(90,\frac{1}{6})$ に従う。ゆえに分散は $npq = 90\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{2}$

7 当たる確率は $\frac{3}{50}$ である。4 回引いたときに X 回当たる確率は ${}_4C_X\left(\frac{3}{50}\right)\left(\frac{47}{50}\right)$ である。よって X は二項分布 $B(4,\frac{3}{50})$ に従う。結局求める標準偏差は $\sigma = \sqrt{4\times\frac{3}{50}\times\frac{47}{50}} = \frac{\sqrt{141}}{25}$

8 (1) 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。10 回振って k 回 1 の目が出る確率は ${}_{10}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$ となる。

(2) X は二項分布 $B(10,\frac{1}{6})$ に従う。よって X の期待値は $E(X) = np = 10\times\frac{1}{6} = \frac{3}{5}$

(3) 分散は $\sigma^2 = npq = 10\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{8}$ である。また一方、分散を期待値で表す方法は $\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{10}k^2P(x=k) - (E(X))^2$ である。従って、$\sum_{k=0}^{10}k^2P(x=k) = \sigma^2+(E(X))^2 = \frac{25}{8}+(\frac{3}{5})^2 = \frac{25}{6}$

9

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n}(x-k)^2P(k) = E\{(x-k)^2\} = E(x^2)-E(2xk)+E(k^2) = x^2-2xE(k)+E(k^2)\\
&= \{x-E(k)\}^2+E(k^2)-(E(k))^2 \geq E(k^2)-(E(x))^2
\end{aligned}$$

実数の 2 乗の最小値は 0 であることを使った。ゆえに求める最小値は $E(k^2)-(E(x))^2 = \sigma-2 = npq = np(1-q)$ となる。