

第 7 回統計の考え方小テスト / レポート

1 相異なる 5 つの文字 a, b, c, d, e を用いてできる 120 個の順列を辞書式に a, b, c, d, e から e, d, c, b, a まで並べるとき、b, d, c, e, a は何番目か。

2 ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$ を証明せよ。

3 ${}_nP_r = (n - r + 1){}_nP_{r-1}$ を証明せよ。

4 ${}_nC_4 = 126$ を満たす n を求めよ。

5

$$2{}_nC_2 + 9{}_nC_3 + 12{}_nC_4 + 5{}_nC_5 = \frac{n^2(n^2 - 1)(n + 2)}{24}$$

を証明せよ。

6 15 人のうちから 4 人の委員を選ぶ方法は何通りあるか。

7 YOKOHAMA の 8 文字を 1 列に並べるのに、O と A が必ず偶数番目にくるような並べ方は何通りあるか。

8 10 人の生徒の中から 7 人を選ぶとき、特定の 2 人をともに含むような選び方は何通りあるか。

9 実数 x についての命題

$$x < -2 \Rightarrow x < 1$$

の真偽を集合を使って調べよ。

10 自然数 n についての命題

$$n \text{ が偶数} \Rightarrow n \text{ が } 4 \text{ の倍数}$$

が偽であることを示せ。

11 大小のサイコロを 2 個同時に振って

(1) 目の和が 5 になる確率を求めよ

(2) 目の和が 4 より小である確率を求めよ。

12 事象 A, B は互いに独立で、 $P(A) = P(B) = x$ とする。このとき、 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{4}{9}$ となるような x の値を求めよ。ただし、 $P(A)$ は事象 A の起こる確率、 $\bar{A}$ は A の余事象とする。

13 2 つの独立な事象 A, B に対し、A, B が同時に起こる確率が $\frac{1}{14}$ 、A か B の少なくとも一方が起こる確率が $\frac{13}{28}$ である。このとき、A の起こる確率 $P(A)$ と B の起こる確率 $P(B)$ を求めよ。ただし、 $P(A) < P(B)$ とする。

14 袋の中に白球 8 個、赤球 2 個入っている。2 個続いて取り出すとき、赤球が続いて出る確率を求めよ。ただし、球は元に戻さないものとする。

15 ある試験に A, B, C のおのおのが合格する確率はそれぞれ $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ である。3 人とも合格する確率を求めよ。

16 事象 A の起こる確率が $\frac{5}{12}$ 、事象 B の起こる確率が $\frac{3}{8}$ 、事象 A, B がともに起こる確率が $\frac{1}{12}$ とする。

(1) A は起こるが B は起こらない確率 $P(A \cap \bar{B})$ を求めよ。

(2) A, B の少なくとも一方が起こる確率 $P(A \cup B)$ を求めよ。

(3) A が起こった場合の B の起こる確率 $P_A(B)$ を求めよ。

(4) A, B は互いに独立な事象でないことを示せ。

第 6 回統計の考え方解答

$P_B(A) = P_A(B)$ を $P(B|A) = P(A|B)$ と書くことがある。

- 1 (1) 取り出した球を元に戻すならば、第 1 球が白球でも赤球でもよい。よってこのときは $P_E(F) = \frac{4}{7}$
 (2) 取り出した球を元に戻さないときなら、第 2 回目は全部で 6 個。そのうち赤球は 4 個あるのだから、 $P_E(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- 2 (1) $P_E(E)$ は 1 回目に赤球が出たとき、第 2 回に赤球が出る確率であるから、 $P_E(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 (2) $P_E(\bar{E})$ は 1 回目に白球が出たとき、第 2 回に白球が出る確率であるから、 $P_E(\bar{E}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- 3 第 1 回目に赤球が出ることを E で表し、第 2 回目に赤球が出ることを F で表す。求める確率は $P(E \cap F)$ で表せる。「して、さらに」の問題なので、これは $P(E)$ と $P(F)$ の積。 $P(E) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P_E(F) = \frac{1}{9}$ より、 $P(E \cap F) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$
- 4 A, B, C の合格率をそれぞれ E, F, G とすると、3 人とも合格するのは、A が合格して、さらに B が合格して、さらに C も合格するということである。したがって、 $P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ 。
- 5 4 回のうち 2 回面が出て、2 回裏が出ればよい。これは ${}_4C_2$ 通り。よって ${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- 6 2, 3, 4, 5, 6 (見分けがつく) の 5 枚を 10 個の箱に入れる方法は ${}_{10}P_5$ 通り、残りは必ず 1 が入る。よって確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times {}_{10}P_5 = \frac{140}{6^7}$

7 図で書くと A の起こる確率 $P(A) = \frac{5}{12} = x + y$ 、B の起こる確率 $P(B) = \frac{3}{8} = y + z$ 、ともに起こる確率 $P(A \cap B) = \frac{1}{12} = y$ であるので、 $x = \frac{1}{3}$, $z = \frac{7}{24}$ となる。

- (1) A は起こるが B は起こらない確率 $P(A \cap \bar{B}) = x$ そのものなので、 $\frac{1}{3}$
- (2) A, B の少なくとも一方が起こる確率 $P(A \cup B) = x + y + z = \frac{17}{24}$
- (3) A が起こった場合の B の起こる確率 $P_A(B)$ は、 $P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{5}$
- (4) A, B が独立であるとして、計算すると、矛盾してしまうことを示せばよい。独立である場合

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

でなくてはならないが $P(A \cap B) = y = \frac{1}{12}$ と、 $P(A) \cdot P(B) = (x + y) \cdot (y + z) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{32}$ となり、(1) と矛盾する。よって独立ではない¹。

8 全部の並べ方は $4! = 24$ 通り。箱を右から A, B, C と名前をつけておこう。

- (1) 左端のカードが 1 でないということは、左端 A に並べてよい並べ方は、 $3!$ 通り、その隣 B に並べるのは 1 を含めるので $3!$ 通り、その隣 C に並ぶのは $2!$ なので、 $3! \times 2! \times 2! = 18$ 通り。うち、右端に 1 が来る場合は、A の選び方 $3!$ 通り、そのあと C を選ぶことにし、1 を含めない場合なので $2!$ 通り。あとはよって、B に来るカードが 1 である場合は、左端も右端も 1 ではない場合なので、 $1 - \frac{3!2!}{3!2!2!} = \frac{1}{3}$
- (2) A のカードが 1 である確率と C のカードが 4 である確率は、 $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ で表せる (A と B の重なりを引いてある)。求める場合は、好き勝手に並べる $4!$ からこれらを引いたものであるから、 $4! - (3! + 3! - 2!)$ で、そのうち、B が 1 の場合は、C が 2 または 3, A が 1 と C で残った方のどちらか、になるので、4 通り。よって 4 通り。したがって、 $\frac{4}{4! - (3! + 3! - 2!)} = \frac{2}{7}$

9 偶数の目の出る確率は $P(A) = \frac{1}{2}$

- (1) $k = 3$ のとき、 $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P_B(A)$ は、このとき、2 の目だけが該当する場合なので、 $P(B|A) = \frac{1}{3}$
- (2) $P(A|B)$ は、偶数が出てその面が赤い場合である。これが、 $P(A) = \frac{1}{2}$ と同じ場合、B であろうがなかろうが A が成り立つため、独立と言うことができる。その場合は $k = 2$, $\frac{1}{4}$ となる。

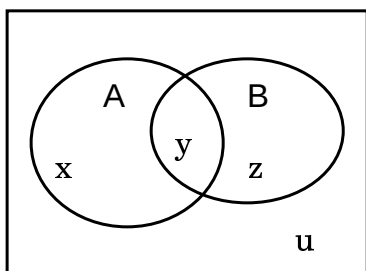


図 1: 問 7

¹独立ならば $P(A) = P_B(A)$ または $P(B) = P_A(B)$ を示せばよいが、どちらも同じ値にならないので、これ示して独立でないことを示してもよい。