第 4 回統計の考え方レポート

1 次の命題の真偽を調べよ。

- (1) 自然数 15 は 3 で割り切れる。
- (2) 1 辺が 3 [cm] の立方体の体積は 9 [cm³] である。
- (3) 自然数 n が 4 の倍数ならば、 n は偶数である。

2 実数 x についての命題

$$x < -2 \Rightarrow x < 1$$

の真偽を集合を使って調べよ。

3 実数 x についての命題

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

を調べよ。

4 自然数 n についての命題

$$n \text{ が偶数} \Rightarrow n \text{ が 4 の倍数}$$

が偽であることを示せ。

5 整数を要素とする 4 つの集合 $S_1 = \{1, 2, 4, 7, 11\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_3 = 1, 5, a, b$, $S_4 = \{1, 2, 4, c\}$ について、次の問に答えよ。

- (1) 和集合 $S_1 \cup S_2$ を求めよ。
  - (2) 積集合 (共通部分) $S_1 \cap S_2$ を求めよ。
  - (3) $S_3 \cap S_4 = \{1, 3\}$, $S_3 \cup S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, であるとき、 a, b, c を求めよ。
- 6 $\square$ という記号を次のような計算をするための記号と定義する (演算と呼ぶ)。すなわち、 $x \square y$ は $x = 1$ かつ $y \neq 1$ の場合にのみ 1 となり、それ以外の場合には 0 となる。以下の選択肢から選べるとき、(1) ~ (4) の場合に当てはまるものを 1 つ選べ。

- (a) 常に 1
- (b) 常に 0
- (c) a の値に関わりなく $b = 1$ ならば 1, $b \neq 1$ ならば 0
- (d) b の値に関わりなく $a = 1$ ならば 1, $a \neq 1$ ならば 0
- (e) $a = 1$ かつ $b \neq 1$ ならば 1, $a \neq 1$ かつ $b = 1$ ならば 0
- (f) $b = 1$ かつ $a \neq 1$ ならば 1, $b \neq 1$ かつ $a = 1$ ならば 0

- (1) $a \square a$
- (2) $b \square a$
- (3) $a \square (b \square a)$
- (4) $(a \square b) \square b$

第 3 回統計の考え方解答

$${}_n C_m = \frac{n!}{(m-n)!m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

である。右辺では、分母は開始が m で、分子の開始は n となり、分母は 1 までかけ算する。分子のかけ算する数の個数と分母でかけ算する個数が同じになる。また、

$${}_n C_m = {}_n C_{n-m}$$

が成り立つ。

1. (1) 28   (2) 56   (3) 21   (4) 35   2. $n = 9$ 3. 各項ごとに計算するとよい。
4. 1365 通り   5. 144 通り   6. ${}_8 C_5 = 56$ 通り   7. $14m(m-1)$ 個
8. 好きなように並べる方法が ${}_{10} C_3 = 120$ 通り。次に同じ字母を含むものを数える。ペアとなるのは ${}_5 C_1 = 5$ 通り。残りは $(10-2) = 8$ 文字の中から選ぶので ${}_8 C_1 = 8$ 通り。よって同じ字母を含むのは ${}_5 C_1 \times {}_8 C_1 = 5 \times 8 = 40$ 通り。同じ字母を含まない場合は、 $120 - 40 = 80$ 通り。

9

- (1) 各問とも 5 つのパターンしかない。じゃんけんと同じ。 $5^5 = 3125$ 通り。
- (2) 3, 4, 5 問正解の場合を分ける。解答は、3 問正解の場合または 4 問正解の場合または 5 問正解の場合が該当するから、足算で求める。
  - (i) 3 問正解の場合。正解した場合の正答する問題番号の組み合わせは ${}_5 C_3 = {}_5 C_2$ 通り。不正解でも部分点があり、これらは 4 つの得点パターンがある。残りはじゃんけんと同じなので、 $4^2 = 16$ 通り。3 問正解かつ残り 2 問が不正解の場合なので、 ${}_5 C_2 \times 4^2$ 通り。
  - (ii) 4 問正解の場合。正解した場合の正答する問題番号の組み合わせは ${}_5 C_4 = {}_5 C_1$ 通り。不正解でも部分点があり、これらは 4 つの得点パターンがある。残りはじゃんけんと同じなので、 $4^1 = 4$ 通り。4 問正解かつ残り 1 問が不正解の場合なので、 ${}_5 C_1 \times 4$ 通り。
  - (iii) 5 問正解の場合。 ${}_5 C_5 = 1$ 通り。

よって、 ${}_5 C_3 \times 4^2 + {}_5 C_4 \times 4 + {}_5 C_5 = 181$ 通り。

- (2) 総得点が 80 点以上となる場合は、正解数ごとに可能性を求めるとよい。
  - (i) 5 問正解のときは 1 通り。
  - (ii) 4 問正解のときは 1 つが不正解な場合が ${}_5 C_1 = 5$ 通り。不正解な部分点の取り方は 20 点満点を除いて、4 通り。したがって ${}_5 C_1 \times 4$ 通り。
  - (iii) 3 問正解のときは ${}_5 C_3$ 通り。ただし、2 つが不正解な場合が ${}_5 C_2$ 通りを数えても ${}_5 C_2 = {}_5 C_3$ で同じ。不正解な部分点の取り方は、
    - 2 問とも 15 点
    - 1 問 15 点、残りが 10 点 (2 つのうち 1 つが 15 点となる取り方は ${}_2 C_1$ 通り)
    - 1 問 15 点、残りが 5 点 (2 つのうち 1 つが 15 点となる取り方は ${}_2 C_1$ 通り)
    - 2 問とも 10 点
 したがって全部で ${}_5 C_3 \times (1 + {}_2 C_1 + {}_2 C_1 + 1)$ 通り。
  - (iii) 2 問正解のときは ${}_5 C_2$ 通り。3 問のうちで不正解な部分点の取り方は、
    - 3 問とも 15 点
    - 2 問 15 点、残りが 10 点 (3 つのうち 1 つが 10 点となる取り方は ${}_3 C_1$ 通り)
 したがって全部で ${}_5 C_2 \times (1 + {}_3 C_1)$ 通り。
  - (iv) 1 問正解のときは残りの問題全ての部分点が 15 点以外はない。 ${}_5 C_1$ 通り。

全ての結果を足し合わせると求めることができる。(i),(ii),(iii),(iv) より、

$${}_5 C_5 + {}_5 C_4 \times 4 + {}_5 C_3 \times 6 + {}_5 C_2 \times 4 + {}_5 C_1 = 126(\text{通り})$$